# 从参数唯一确定的观点论联立经济模型的识别问题

田国强

**提　　要**

本文从待估参数应是唯一确定的基本观点出发，定义了向量可区分和可识别的概念，从而用统一的方法讨论了同期模型的识别问题。文中去掉了外生变量不由任何线性恒等式连接的通常假定[1]、[2]，把多重共线性问题归结为识别问题。此方法也同样适用于非线性模型，误差冲击模型和动态模型的讨论。

联立经济模型的识别问题是计量经济学的主要课题之一。目前已有的方法都是从观测上等价的角度得出的[1]、[2]。本文基于联立方程解的数学理论，论述了经济计量模型的识别问题，得到了更为系统而简洁的数学描述，获得了有意义的结果。向量可区分和可识别的概念的提出，有可能沟通其它系统(如控制系统、生物系统等)间的识别关系。

## 一、定义．向量的区分和识别

**定义1**　当且仅当模型中所有未知参数能够根据观测信息和先验信息唯一地决定(或局部唯一地确定)时，我们说这个模型能识别(或局部地识别)。

此定义包含了文献[1]、[2]中的识别定义。

**定义2**　如果多于一组的参数使得模型中的内生变量具有同样的分布，则称这个模型不能识别。

**定义3**　模型在所有有利于识别的独立的先验信息下才能识别，我们称为恰好识别。

**定义4**　模型在部分而不是在全部有利于识别的独立的先验信息下能识别，我们称为过度识别。

**定义5**　如果模型以概率 1 能识别，称它几乎能识别。

**定义6**　既不能识别又不能几乎能识别的模型，称它完全不能识别。

几乎能识别是识别概念的推广。它和完全不能识别有本质上的差异。几乎能识别意味着本来有足够的先验信息可能使得它能识别，但由于观测和(或)计算误差的偶然性可能使它不能识别，而完全不能识别是由于事前信息不足，无论观测和计算多么精确，观测样本多么大，它也不能被识别。

为了便于研究，下面我们给出具有某些特征的向量的可区分和可识别的概念及有关定理。通过这样数学上的抽象，经济模型的识别可视为向量识别的一种特殊情况。

本文一九八二年四月十五日收到。

**定义7**　对于向量偶 $(\alpha,\beta)$，$\alpha,\beta\in R^N$，如果 $\alpha$ 具有某些特征，而 $\beta$ 也具有这些特征，则称仅凭这些特征 $\alpha$ 和 $\beta$ 不能区分；否则说 $\alpha$ 和 $\beta$ 能区分。

$\alpha$ 和 $\beta$ 有序的关系。尽管 $\alpha$ 和 $\beta$ 仅凭这些特征不能区分，但 $\beta$ 和 $\alpha$ 仍然可能可区分。如 $\alpha=(A,B)$，$\beta=(A,B,C)$，$A,B,C$ 分别代表某种特征。

**定义8**　如果具有某些特征的向量 $\alpha\in R^N$，在 $R^N$ 中的其它向量不具有这些特征，则 $\alpha$ 被唯一地确定了，称 $\alpha$ 是可识别的。

从定义7和定义8，可推出

**定理1**　对给定的 $N\times K$ 阶矩阵 $W(N>K)$，如果 $A$ 是 $W$ 的行核基（$A$ 是 $G\times N$ 阶矩阵且 $A$ 的行构成 $xW=0$ 的解向量的一组基），则当且仅当 $\alpha$ 不是 $A$ 的行向量的线性组合时，根据 $xW=0$，$A$ 的第 $g$ 行 $A_g$ 与 $\alpha$ 能区分。

**定理2**　如果 $A$ 是 $W$ 的行核基，$A_g$ 已规范化（即令 $A_g$ 的某个分量为1），则当且仅当 $A_g$ 能与 $A$ 的行向量的线性组合可区分时，$A_g$ 可识别。

由定理1知，对于 $A$ 的元素，如果没有其它限制，将任一非奇异的 $G\times G$ 阶矩阵 $F$ 乘 $AW=0$ 的两边，则有 $F(AW)=(FA)W=0$。

令 $A^*=FA$，$A^*$ 的第 $g$ 行记为 $A_g^*$，得 $A_g^*=F_gA$。由于 $A_g$ 与 $A_g^*$ 都是 $xW=0$ 的解，故不能将 $A_g$ 与 $A_g^*$ 区分开来。如果对 $A_g$ 加上某些限制，且 $A_g^*$ 也满足这些限制，则说 $A_g$ 与 $A_g^*(g=1,2,\cdots,G)$ 不能区分；否则可区分。这样就排除了许多经过可逆线性变换矩阵 $F$ 的作用而产生的 $A_g^*$。

**定义9**　如果 $G\times G$ 阶矩阵 $A$ 是 $W$ 的行核基，且 $A$ 具有某些特征，而对于某个 $G\times G$ 阶可逆矩阵 $F$，$FA$ 也具有这些特征，则称由 $F$ 表示的线性变换为允许变换，对应的矩阵称为允许矩阵。

若 $A_g$ 的约束足够多，以致允许矩阵 $F$ 的第 $g$ 行除了第 $g$ 个元素等于1外，其余都为零，则由定理2，$A_g$ 能识别；反之也对。同理，当且仅当 $F$ 为单位矩阵时，$A$ 能识别。当一个方程有确定意义时，两边同时乘上一非零常数，不会改变这个方程的意义。所以加或不加规范化条件，对识别不会产生本质上的影响，于是只要允许变换矩阵 $F$ 为对角矩阵，$A$ 就算识别了。

**定理3**　对于满足 $AW=0$ 的 $M\times N$ 阶行满秩矩阵 $A$ 和秩为 $K^\circ$ 的 $N\times K$ 阶矩阵 $W$，如果 $A$ 的第 $g$ 行 $A_g$ 的约束为

$$A_g\phi_g=d_g, \tag{1}$$

式中，$\phi_g$ 是已知的 $N\times R_g$ 阶常数矩阵；$d_g$ 是已知的 $1\times R_g$ 阶行向量。

则 $A_g$ 在约束 $A_gW=0$ 和（1）式下能识别的充要条件是

$$\text{秩}\ (\bar{A}\phi_g)=\begin{cases} N-K^\circ & d_g\neq 0; \\ N-K^\circ-1 & d_g=0, \end{cases}$$

这里 $\bar{A}$ 是 $W$ 的行核基且 $\bar{A}$ 的前面 $M$ 行组成的子矩阵就是 $A$，$d_g\neq 0$ 意味着至少有一个分量不为零，$d_g=0$ 表示所有的分量为零。

**证明**　由于秩 $(A)=M$，知秩 $(W)=K^\circ\leqslant N-M$。当 $K^\circ=N-M$ 时，$A$ 是 $W$ 的行核基；当 $K^\circ<N-M$ 时，$A$ 不是 $W$ 的行核基。于是，存在 $N-M-K^\circ$ 个与 $A$ 的行线性无关的 $xW=0$ 的解向量 $C_1,C_2,\cdots,C_{N-M-K^\circ}$，使得 $\bar{A}=(A',C_1',\cdots,C_{N-M-K^\circ}')'$ 构成了 $W$ 的行核基。于是有

$$\bar{A}W=0. \tag{2}$$

要证明$A_g$能识别，由定理2，只要证明(2)式的允许变换矩阵$F$的第$g$行的第$g$个元素不为零，其余都为零即可。先考虑$d_g\neq 0$的情况。对于$F_g=e'_g$($e'_g$是单位矩阵的第$g$行)，有$\bar{A}_g^*\phi_g=e'_g\bar{A}\phi_g=A_g\phi_g=d_g$，所以$F_g=e'_g$是方程$F_g(\bar{A}\phi_g)=d_g$的解。要解唯一，充要条件是秩$(\bar{A}\phi_g)=N-K^\circ$(包括矛盾方程的解)。

同理可证，当$d_g=0$时，要解成比例，充要条件是秩$(\bar{A}\phi_g)=N-K^\circ-1$。

**推论1**　在约束$A_gW=0$和(1)式下，$A_g$可识别的必要条件是

$$R_g\geqslant\begin{cases}N-K^\circ & d_g\neq 0;\\ N-K^\circ-1 & d_g=0.\end{cases}$$

我们将按两种方法研究识别问题。一种是把$A$的所有特征放在一起来识别$A$，称为一步识别法。另一种称为二步识别法，首先利用$xW=0$将$A_g$与不是$\bar{A}$的行向量的线性组合区分开来，然后再利用$A_g$本身的先验信息将它和$\bar{A}$的行向量的线性组合区分开来。

## 二、同期模型的识别

根据经济理论，我们假定模型具有

$$BY_t+\Gamma X_t=u_t \tag{3}$$

的形式，式中$Y_t$，$X_t$和$u_t$分别是在时刻$t$的$G\times 1$阶、$K\times 1$阶和$G\times 1$阶的内生变量、外生变量和不可观测的随机项；$B$和$\Gamma$分别是$G\times G$阶和$G\times K$阶待估系数矩阵。

**假定1**　$B$是非奇异的。

**假定2**　$Eu_t=0$，$Eu_tX'_t=0$。

当$u_t$是序列无关时，$X_t$可以包含滞后的内生变量，因为有$\text{Plim}\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T}X_tu'_t=0$。

令　$C_X=EX_tX'_t$，$C_{YX}=EY_tX'_t$，$C_Y=EY_tY'_t$，$\Sigma=Eu_tu'_t$，

则(3)式的所有二阶矩信息是

$$BC_{YX}+\Gamma C_X=0; \tag{4}$$

$$\Sigma=E(BY_t+\Gamma X_t)(BY_t+\Gamma X_t)'=BC_YB'+BC_{YX}\Gamma'+\Gamma C_{XY}B'+\Gamma C_X\Gamma',$$

由(4)式，上式简化为

$$BC_YB'=\Gamma C_X\Gamma'+\Sigma; \tag{5}$$

从(5)式可以看出，当$B$和$\Gamma$可识别时，$\Sigma$也能识别。先讨论如何利用二步识别法进行识别。

第一步，令　$A=(B,\Gamma)$，$W=(C'_{YX},C'_X)'$，

这里$(G+K)\times K$阶矩阵$W$与文献[1]、[2]中的$W$的含义不同($C_X$也许是奇异的)。则(4)式可以写为

$$AW=0, \tag{6}$$

由假定1知$A$是$G\times(G+K)$阶行满秩矩阵。对于(6)式中$A$的第$g$行$A_g$也有

$$A_gW=0. \tag{7}$$

记秩$(W)=K^\circ$。如果$C_X$是非奇异的，则由假定1，$K^\circ=K$。这时$A$构成了$W$的行核基；若$C_X$是奇异的，这时$K^\circ<K$，$A$不是$W$的行核基，于是存在着$K-K^\circ$个与$A$的行线性无关的$xW=0$

的解向量 $C_1, C_2, \cdots, C_{K-K^\circ}$。使得 $\bar{A}=(A', C_1', \cdots, C_{K-K^\circ}')$ 构成了$W$的行核基，即$\bar{A}W=0$。

由定理1，仅凭样本观测信息$W$可将 $A_g$ 与不是$\bar{A}$的行向量的线性组合区分开来，而不能将它同$\bar{A}$ 的行向量的线性组合区分开来，这样，如果对(3)式的参数不加任何限制，则任一个 $(G+K-K^\circ)\times(G+K-K^\circ)$ 阶可逆矩阵都是允许矩阵。这时 $A_g(g=1,2,\cdots,G)$ 是完全不能识别的。

第二步，如果$A_g$具有约束

$$A_g\phi_g=d_g, \tag{8}$$

式中，$\phi_g$是已知的$(G+K)\times R_g$阶常数矩阵；$d_g$是已知的$1\times R_g$阶行向量。则由定理3，有

**定理4**　在假定1、2及约束(7)式和(8)式下$A_g$能识别的充要条件是

$$\text{秩}\ (\bar{A}\phi_g)=\begin{cases} G+K-K^\circ & d_g\neq 0; \\ G+K-K^\circ-1 & d_g=0. \end{cases}$$

**推论2**　在定理4中的假定和约束下，$A_g$能识别的必要条件是

$$R_g\geqslant\begin{cases} G+K-K^\circ & d_g\neq 0; \\ G+K-K^\circ-1 & d_g=0. \end{cases}$$

特别，当$C_X$为非奇异时，就得到了通常的秩条件和阶条件[1]·[2]；

**推论3**　当 $C_X$ 为非奇异时，在定理4的假定和约束下，$A_g$ 能识别的充要条件是

$$\text{秩}\ (A\phi_g)=\begin{cases} G & d_g\neq 0; \\ G-1 & d_g=0. \end{cases}$$

$A_g$能识别的必要条件是

$$R_g\geqslant\begin{cases} G & d_g\neq 0; \\ G-1 & d_g=0. \end{cases}$$

**定理5**　如果定理4的条件成立，则$A_g$能恰好识别的充要条件是

$$R_g=\begin{cases} G+K-K^\circ & d_g\neq 0; \\ G+K-K^\circ-1 & d_g=0. \end{cases}$$

$A_g$是过度识别的充要条件是

$$R_g>\begin{cases} G+K-K^\circ & d_g\neq 0; \\ G+K-K^\circ-1 & d_g=0. \end{cases}$$

当 $C_X$ 为非奇异时，便得到通常的结果[1]。

如果阶条件成立，但通过计算，秩条件不成立，可以认为这是由观测误差和(或)计算误差的偶然性造成的。由于使得矩阵$\bar{A}\phi_g$的$(G+K-K^\circ)\times(G+K-K^\circ)$阶子矩阵的行列式等于误差零的点集的Lebesgue测度等于零，于是推得

**定理6**　当且仅当阶条件成立时，$A_g$能几乎识别。

上面讨论的二步法只适应于某个方程的参数间有函数关系的情况，对于方程组各方程间的参数有函数关系的模型宜用一步识别法进行判断。先看某个方程有约束的情况。

将 $A_gW=0$ 和 $A_g\phi_g=d_g$ 合写为

$$A_g(W\,\vdots\,\phi_g)=(0\,\vdots\,d_g). \tag{9}$$

**定理7**　在假定1、2及约束(9)式下，$A_g$能识别的充要条件是

$$\text{秩}\,(W\,\vdots\,\phi_g)=\begin{cases} G+K & d_g\neq 0; \\ G+K-1 & d_g=0. \end{cases}$$

现在讨论如何把$A$作为一个整体来识别．将$A$按行拉直，记为$\overrightarrow{A}=[A_1,A_2,\cdots,A_G]'$，于是$AW=0$可以写为

$$(I_G\otimes W')\overrightarrow{A}=0, \tag{10}$$

式中符号$\otimes$表示 Kronecker 积．这时

$$(I\otimes W')=\begin{pmatrix} W' & & & \\ & W' & & \\ & & \ddots & \\ & & & W' \end{pmatrix}$$

是$[GK\times G(G+K)]$阶矩阵．

假定在规范化条件下，$\overrightarrow{A}$的约束为

$$\phi\overrightarrow{A}=d, \tag{11}$$

式中，$\phi$是已知的$R\times(G^2+GK)$阶常数矩阵；$d$是已知的$R\times1$阶列向量．令

$$Q=\begin{pmatrix} I_G\otimes W' \\ \phi \end{pmatrix};\quad \bar{d}=\begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix},$$

于是(10)式和(11)式可以合写为

$$Q\overrightarrow{A}=\bar{d}. \tag{12}$$

**定理8**　在假定1、2和约束(12)式下，$\overrightarrow{A}$能识别的充要条件是秩$(Q)=G(G+K)$．

**推论4**　在定理 8 中的假定和约束下，$\overrightarrow{A}$能识别的必要条件是$R\geqslant G(G+K-K^{\circ})$；特别，当$C_X$非奇异时，$\overrightarrow{A}$能识别的必要条件是$R\geqslant G^2$，即通常的阶条件[2]．

有时整个$\overrightarrow{A}$不能识别，但$\overrightarrow{A}$的部分元素能识别．我们可以利用类似文献［2］中的证明方法，得到类似的结果．

当$C_X$非奇异时，由(4)式有

$$C_{YX}C_X^{-1}=-B^{-1}\Gamma=\Pi,$$

所以诱导型的参数$\Pi$完全可由事后信息确定，这时$\Pi$能够被一致地估计．然而，当$C_X$奇异时，它不满足 Proximity定理的条件[1]，仅凭样本观测信息不能得到$\Pi$的一致估计量，因$\Pi$对应着无数个参数估计量$\hat{\Pi}$．从识别的观点看，这时$\Pi$不能识别．从上分析得知，当$C_X$为奇异时，对$\Pi$或$A$也要有先验信息，$\Pi$才能识别．如果$(B,\Gamma)$能识别(即使$C_X$是奇异的)，则由关系式$\Pi=-B^{-1}\Gamma$知，$\Pi$也能识别．这时，我们可以用工具变量加上$A$的事前约束来估计$A$，从而由$-\hat{B}^{-1}\hat{\Gamma}$来确定$\hat{\Pi}$，这样得到的$\hat{A}$和$\hat{\Pi}$都是一致估计量．由于$C_X$是奇异的，故不能按照通常的估计方法（如间接最小二乘法，二段最小二乘法）来估计$A$和$\Pi$．

至此我们可以导出一个重要观点：多重共线性问题可以视为识别问题而不是变量间有线性关系或近似线性关系的问题．只要有足够多的事前信息，无论多重共线性多么严重，总可得到$A$的一致估计量；也可以从另一方式考虑多重共线性问题：有多重共线性，则必有某些外生变量能被其余的外生变量线性地或近似线性地表示，我们把这些外生变量看做内生变量．这些关系式和(3)式组成了一个新的模型，从而需要更多的关于$A$的事前信息才能识别$A$．为了说明这些，考虑模型：

$$P_t = a_0 + a_1 W_t + a_2 L_t + a_3 I_t + e_t, \tag{13}$$

式中 $P_t, W_t$, $L_t, I_t$ 和 $e_t$ 分别表示在时刻 $t$ 的产量、工资、劳力、投资和误差项。假定 $W_t$ 和 $L_t$ 有线性关系：$W_t = KL_t$，则对任意常数 $a_1^*$，都有相同的 $P_t$，即

$$P_t = a_0 + a_1 W_t + a_2 L_t + a_3 I_t = a_0 + (a_1 - a_1^*) W_t + (a_2 + K a_1^*) L_t + a_3 I_t.$$

这样，无穷多组参数估计量对应着同样的 $P_t$，从识别的角度看，(13) 式是完全不能识别的。将 $W_t = KL_t$ 代入(13)式有

$$P_t = a_0 + (a_1 K + a_2) L_t + a_3 I_t + e_t. \tag{14}$$

假定剩下的变量没有多重共线性，对(14)式进行回归，那么我们能够得到 $a_0$, $b \triangleq (a_1 K + a_2)$ 和 $a_3$ 的一致估计量。于是对(13)式的参数有约束

$$K a_1 + a_2 = b. \tag{15}$$

因此在约束 (15) 式下，由定理 4 知，$(a_0, a_1, a_2, a_3)$ 能够识别，从而能够得到它们的一致估计量。

我们再从另一种方式看这个问题，把

$$\begin{cases} P_t = a_0 + a_1 W_t + a_2 L_t + a_3 I_t + e_{1t}; \\ W_t = KL_t + e_{2t} \quad (e_{2t} \equiv 0) \end{cases} \tag{16}$$

看成联立方程组，这时

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} -a_0 & -a_2 & -a_3 \\ 0 & -K & 0 \end{pmatrix},$$

显然 $|B| \neq 0$。如果没有任何事前约束，则(13) 式不能与 (16) 式的线性组合区分开来。因此(16)式的第一个方程完全不能识别，除非加上某些事前信息(如 $Ka_1 + a_2 = b$)。

用上述方法，我们还分别对非线性模型、误差冲击模型和动态模型进行了识别，取得了与上类似的有意义的结果。

本文得到了林少宫教授和李楚霖老师的指导，在此表示谢意。

## 参 考 文 献

[1] Fisher, F. M., *The Identification Problem in Econometrics*, New York: McGraw-Hill (1966).

[2] Hsiao, C., *Identification*, Technicl Report No. 311, Stanford, California, (1980).

# The Identification of the Simultaneous Economic Models from the Viewpoint of Unique Determination of Parameters

*Tian Guoqiang*

## Abstract

From the viewpoint that the parameters to be estimated should be uniquely determined, the concepts of the vector discriminability and identifiability are defined and the identification of the contemporaneous models is discussed using a unified method. The usual assumption that no linear identities are connected by exogenous variables[1],[2] are removed so that the multicollinearity problem is reduced to one of identification. This method is also applicable to discussions about non-linear models, error-shock models and dynamic models.