

PLONGEMENT DES ESPACES MÉTRIQUES ET APPLICATIONS.

ÉCOLE DOCTORALE LOUIS PASTEUR

1. INTRODUCTION

Quels liens peut-il y avoir entre des problématiques aussi variées que la recherche d'images dans une banque de données, la reconnaissance de formes, les moteurs de recherche type Google ou la conjecture de Baume-Connes? A priori aucun ... si ce n'est la théorie non linéaire des espaces de Banach ou plus précisément le plongement d'espaces métriques dans ces mêmes espaces. Essayons de rendre cela moins mystérieux.

De plus en plus de domaines dépendent de l'analyse d'un nombre gigantesque de données. Les avancées technologiques de ces dernières années en ont permis la collecte systématique et en très grand nombre. Mais les progrès futurs sont soumis à l'organisation et à la classification de ce réservoir d'informations, en vue de son analyse pertinente. Donnons un exemple concret en bio-informatique. Considérons l'ensemble des protéines. Schématiquement une protéine peut être vue comme un mot dans un alphabet de 20 lettres (les amino-acides). La longueur des mots varie entre une cinquantaine et plusieurs milliers de lettres, la longueur traditionnelle étant de quelques centaines de lettres. Actuellement les séquences d'un peu plus d'un demi million de protéines sont connues.

Depuis des années on développe des algorithmes pour évaluer les similitudes entre les différentes protéines. De même des programmes informatiques calculent très efficacement la "distance" entre ces protéines. On peut alors voir l'ensemble des protéines comme une structure géométrique, un "espace métrique fini", ce qui nous permet d'utiliser des concepts géométriques et des outils mathématiques pour l'analyse de cet ensemble de données. On ne regarde plus une protéine comme une entité propre mais comme élément d'un ensemble dont les points sont répartis d'une certaine manière.

Dans un premier temps, le but de cet article est de donner une intuition précise des notions de distance et d'espace métrique. Ensuite on expliquera comment le plongement de ces espaces apporte des réponses au niveau de l'efficacité algorithmique. Enfin on entrouvrira une fenêtre un peu plus théorique concernant une généralisation de ces problèmes de plongement.

2. LA NOTION DE DISTANCE AU SENS MATHÉMATIQUE

Rentrons dans le vif du sujet et commençons par définir précisément la notion d'espace métrique. Un espace métrique est un ensemble de points, noté X , sur lequel on définit une application qui permet de mesurer la "distance" entre deux points de X . Mais qu'entendons nous exactement par "distance" au sens mathématique?

Dans le langage courant la distance entre deux points est la longueur du plus court chemin pour aller du point de départ au point d'arrivée. C'est la distance "à vol d'oiseau".

Prenons une route rectiligne infinie sur laquelle une borne indique le kilomètre zéro. La distance entre deux voitures A et B situées sur la route, respectivement aux kilomètres k_A et k_B , est la valeur absolue de $k_A - k_B$, notée $|k_A - k_B|$. Mathématiquement on peut modéliser cette situation de la façon suivante:

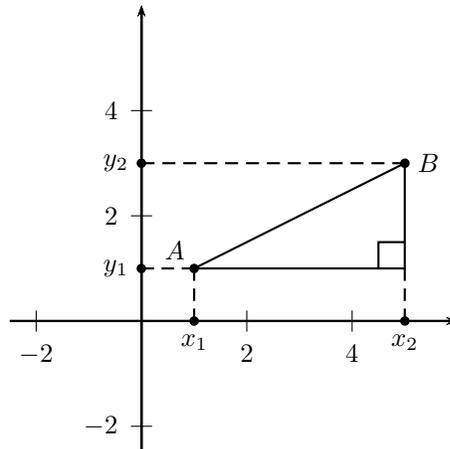
on assimile la route à la droite des réels, notée \mathbb{R} , pour laquelle 0 est l'origine, et à tous réels x et y on associe le réel $|x - y|$. On vient de construire une application d de l'ensemble des couples de réels, noté $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dans l'ensemble des réels positifs, noté \mathbb{R}_+ , i.e :

$$d : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \mapsto & |x - y| \end{array}$$

De même on peut définir une application sur le plan assimilé à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, noté \mathbb{R}^2 , de la façon suivante :

$$d_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \mapsto & \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{array}$$

Le théorème de Pythagore nous dit exactement que l'application d_2 associe à tout couple de points (A, B) , de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , la distance "à vol d'oiseau" entre A et B (illustration ci-dessous). On l'appelle la distance euclidienne.



Ceci se généralise à l'espace tridimensionnel dans lequel nous vivons, modélisable par \mathbb{R}^3 , où tout point de l'espace est caractérisé par un triplet de coordonnées (x, y, z) . Ainsi on définit une distance toujours notée d_2 :

$$d_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \mapsto \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Les trois applications que l'on vient de définir sont des distances au sens de la définition mathématique qui va suivre et coïncident avec la notion de distance que nous rencontrons dans la vie de tous les jours.

Définition 2.1. Soit X un ensemble, une distance sur l'ensemble X est une application sur $X \times X$ à valeurs dans \mathbb{R}_+ et qui vérifie pour tous points x, y et z dans X :

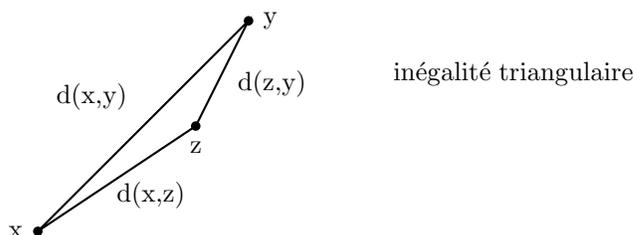
- (1) $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
- (3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire)

Un espace X muni d'une distance d est appelé espace métrique et noté (X, d) .

Cette définition nécessite quelques commentaires.

Remarque 2.1. • Une distance est aussi appelée métrique.

- L'assertion 1 exprime le fait que la distance entre un point et lui-même est nulle et c'est le seul cas.
- L'assertion 2 exprime que la distance entre le départ et l'arrivée est la même que celle entre l'arrivée et le départ.
- L'assertion 3 peut s'interpréter dans certains cas par la maxime suivante: "le plus court chemin est la ligne droite".



Ces assertions sont clairement vérifiées par les trois applications.

(\mathbb{R}, d) , (\mathbb{R}^2, d_2) et (\mathbb{R}^3, d_2) sont donc les trois espaces métriques qui rendent compte de la notion intuitive de distance que nous avons en dimension 1, 2 et 3.

L'ensemble des points situés à une distance plus petite que 1 de l'origine, et que l'on appelle la boule unité, est :

- l'intervalle $[-1, 1]$ pour (\mathbb{R}, d)
- le disque plein de centre l'origine et de rayon 1 pour (\mathbb{R}^2, d_2)
- la boule de centre l'origine et de rayon 1 pour (\mathbb{R}^3, d_2) (ce qui justifie la terminologie).

On va chercher par la suite à construire des ensembles munis d'une distance abstraite, qui modélise un phénomène concret particulier, que l'on désire étudier à l'aide des propriétés de l'espace métrique ainsi construit.

Amusons-nous à construire de nouvelles distances et à interpréter leur signification.

- (1)
- La distance de Manhattan dans le plan :*

Le réseau routier si particulier de la ville de New York est caractérisé par deux ensembles de routes parallèles qui s'intersectent à angle droit. Calculer la distance entre deux endroits c'est additionner la distance dans la direction parallèle à un de ces deux ensembles de routes, à la distance parcourue en suivant l'autre direction. On modélise cette situation comme suit:

$$d_1 : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}_+ \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto \sum_{i=1}^2 |x_i - y_i| := |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

- (2)
- La distance du maximum dans le plan:*

La pression artérielle se mesure au moyen de deux valeurs. La plus grande des deux est la pression systolique et la plus petite, la pression diastolique. Supposons que la pression artérielle d'un patient varie anormalement et que l'on veuille mesurer la différence entre deux mesures de la pression systolique ou entre les deux mesures correspondantes de la diastolique, afin de déterminer laquelle varie le plus. Une modélisation possible est la suivante, où un couple (x_i, y_i) est un relevé de pression:

$$d_\infty : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}_+ \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto \text{Max}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

- (3)
- La distance du coût de transport ou EMD (Earth Mover Distance) dans le plan euclidien:*

Soient A et B deux sous-ensembles du plan euclidien (i.e \mathbb{R}^2 muni de d_2 désormais noté ℓ_2^2 par souci de concision) ayant un même nombre entier n de points, on définit la distance d_{EMD} ainsi:

$$\mathcal{P}_n(\ell_2^2) \times \mathcal{P}_n(\ell_2^2) \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}_+ \\ (A, B) \quad \mapsto \quad \text{Min}\{\frac{1}{n} \sum_{a \in A} d_2(a, f(a)); f \text{ bijection entre } A \text{ et } B\}$$

Quelle est la signification de cette distance?

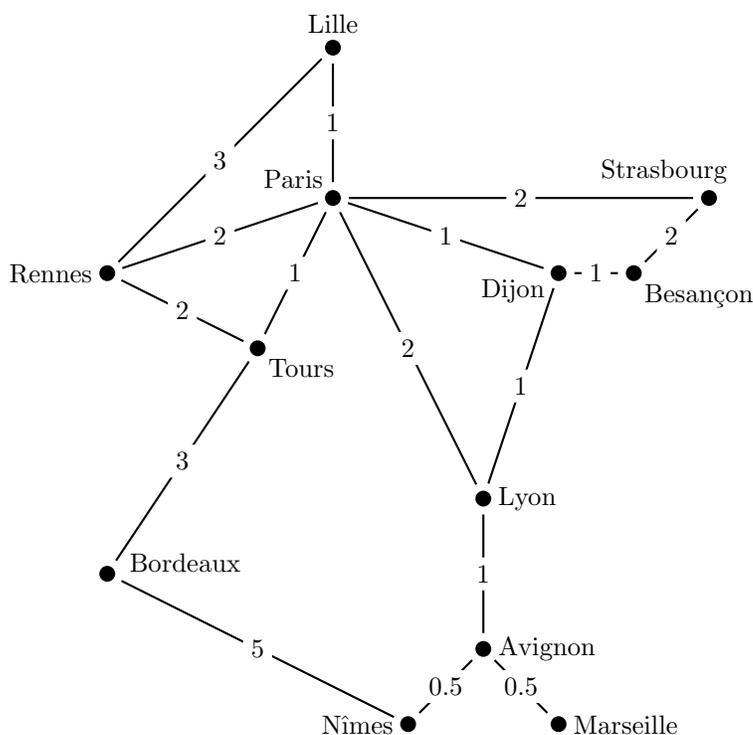
Imaginons que A et B représentent deux répartitions différentes d'un tas de n pierres. La distance EMD entre A et B représente l'énergie minimum que l'on doit dépenser pour déplacer le tas A vers le tas B .

En effet soit f une application qui à une pierre du tas A lui associe une place et une seule (bijection) dans le tas B . Supposons que l'énergie pour déplacer une pierre sur $1cm$ vaut $\frac{1}{n}$. Pour aller de la pierre a du tas A à l'emplacement $f(a)$ du tas B , il nous en coûtera $\frac{1}{n} \times d_2(a, f(a))$ et donc pour tout le tas $\frac{1}{n} \sum_{a \in A} d_2(a, f(a))$. Lorsque l'on prend le minimum sur toutes les façons de passer du tas A au tas B on obtient bien le coût minimum de transport.

La distance EMD est une mesure naturelle de similitude entre les images ou les formes. On pourra considérer des images comme étant semblables si pour chaque couleur la distance EMD entre les pixels de cette couleur d'une image et ceux de la même couleur d'une autre image est petite. Cette distance est un outil fondamental de la recherche d'images dans une base de données (imagerie médicale). Elle est aussi beaucoup utilisée dans la reconnaissance de formes.

(4) *La distance naturelle sur un graphe ou distance SNCF :*

Prenons une petite partie du réseau SNCF que l'on peut modéliser par le graphe suivant:



Les noeuds modélisent les gares, les arêtes les lignes de chemin de fer tandis que les nombres représentent les temps de trajet en heures (le poids d'une arête).

On muni ce graphe de la distance du plus court chemin (ou distance géodésique), i.e que la distance entre la gare A et la gare B est la plus petite somme des temps de trajet entre A et B prise sur l'ensemble des itinéraires entre A et B . On peut vérifier que ce procédé, qui se généralise sur des graphes infinis, définit effectivement une distance sur l'ensemble des noeuds du graphe. On remarquera que Dijon est à la même distance SNCF

de Paris que de Besançon, alors que la distance “à vol d’oiseau” entre Paris et Dijon est plus grande que celle entre Dijon et Besançon. La distance entre deux points est fondamentalement sujette à diverses contraintes qui peuvent nous être imposées.

3. PLONGEMENTS D’ESPACES MÉTRIQUES FINIS ET APPLICATIONS PRATIQUES

Au travers de la section précédente nous avons mis en relief certains phénomènes modélisables par des espaces métriques. La résolution effective de ces problèmes nécessite très souvent une implémentation algorithmique au moyen de l’informatique. Le problème essentiel, qui se présente à nous maintenant, est de quantifier la difficulté de réalisation d’un tel algorithme et d’essayer de donner un ordre de grandeur du temps de calcul nécessaire en fonction du nombre d’éléments de l’espace métrique relatif au problème.

Ces questions qui semblent plutôt appartenir au domaine de l’informatique théorique sont en fait extrêmement liées à la géométrie non linéaire des espaces de Banach, du nom du célèbre mathématicien polonais Stefan Banach (1892-1945), fondateur de la théorie des espaces de Banach [4]. Une théorie mathématique pratiquement centenaire vient alors au secours de la toute récente informatique théorique. Citons simplement John Von Neumann (1903-1957),

“Dans l’ensemble il est vrai qu’en mathématiques il y a un décalage entre la découverte mathématique et le moment où elle devient utile. Ce laps de temps peut aller de 30 à 100 ans, voir plus dans certains cas. L’ensemble du système semble alors fonctionner sans aucun sens, sans aucune référence à l’utilité, et sans aucune volonté de faire des choses qui sont utiles.”

Commençons tout d’abord par décrire les propriétés d’un espace de Banach. (Pour un exposé détaillé de la théorie on pourra consulter indifféremment [3] ou [17])

Définition 3.1. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

C’est donc un ensemble de points (les vecteurs), muni d’une addition et d’une multiplication qui permet de former des combinaisons linéaires qui restent dans l’ensemble. On donne ainsi un sens à des expressions de la forme $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$, où les λ_i sont des réels et les x_i des vecteurs. Ensuite on équipe cet espace vectoriel d’une norme qui rend compte de la taille des vecteurs. Une norme est une application à valeurs positives et qui vérifient les propriétés suivantes :

- (1) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$
- (2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout vecteur x
- (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tous vecteurs x et y .

La complétude est une propriété qui porte sur les suites de l’espace que nous ne détaillerons pas ici.

Par exemple \mathbb{R}^n muni de la norme $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$, où $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, est un espace de Banach de dimension n .

Pour $n = 2$ on retrouve $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$. Ce procédé est général, une norme induit une distance par la formule $d(x, y) = \|x - y\|$.

Tout espace de Banach est donc en particulier un espace métrique. Malheureusement un espace métrique n'a pas forcément d'addition et de multiplication qui lui confère une structure d'espace vectoriel normé. La théorie linéaire des espaces de Banach nous donne accès à de puissants résultats d'analyse fonctionnelle et à des méthodes de calculs qui s'appuient fortement sur la géométrie de ces espaces. L'idée essentielle est donc la suivante:

on va chercher à représenter convenablement l'espace métrique afférent à notre problème dans un espace de Banach adéquat, ce qui nous permettra d'utiliser les puissantes méthodes de calculs disponibles pour les espaces de Banach. On appelle cela plonger un espace métrique.

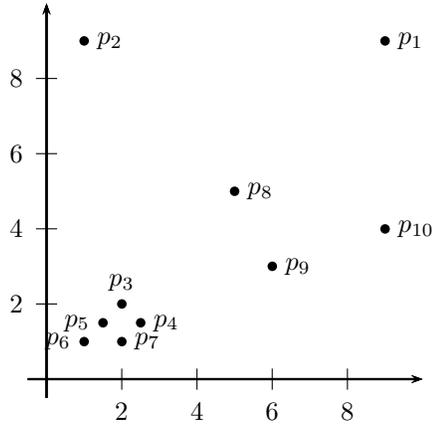
Revenons au problème de l'analyse des protéines. Une distance d sur un ensemble X comportant n points est équivalente à la donnée d'un tableau à n lignes et n colonnes dont les entrées sont des nombres réels positifs (i.e une matrice de taille $n \times n$). En fait $\frac{n(n+1)}{2}$ nombres suffisent à cause de la symétrie. Il est difficile de voir une structure apparaître lorsque n est très grand, ce qui est le cas ici.

On aimerait associer à chaque point x de X un point $f(x)$ dans le plan euclidien ℓ_2^2 tel que la distance $d(x, y)$ entre x et y soit égale à la distance euclidienne entre $f(x)$ et $f(y)$. On dit que l'on effectue un plongement isométrique. Une telle représentation nous permettrait de voir des propriétés spécifiques de l'espace métrique telles que les points d'accumulation, les points isolés, etc... On peut aussi remarquer que l'espace n'est plus caractérisé que par $2n$ valeurs qui sont les 2 coordonnées des n points dans le plan au lieu des $\frac{n(n+1)}{2}$ valeurs dans la représentation sous forme de tableau. De plus, nombreuses sont les quantités relatives à un ensemble de points dans le plan euclidien qui peuvent être calculées par des algorithmes géométriques efficaces, ce qui n'est pas possible pour un espace métrique arbitraire. De même, si le plan est muni d'une autre distance, de tels algorithmes n'existent pas forcément.

Exemple 3.1. Soient $(p_i)_{1 \leq i \leq 10}$ dix protéines distinctes. On quantifie les similitudes entre les protéines en fonction des résultats obtenus à divers tests, ou bien en comparant leurs ADN, etc... On soulignera qu'il y a plusieurs manières de mesurer la similitude. Toutes ne donnent pas forcément lieu à une distance, mais dans la suite nous nous placerons dans ce cas de figure. On suppose donc que les valeurs obtenues sont des distances entre les différentes protéines, que l'on récapitule dans la matrice ci-dessous. L'élément à l'intersection de la ligne i et de la colonne j représente la distance entre les protéines p_i et p_j obtenue par les tests.

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 9.89 & 9.92 & 10.60 & 11.31 & 10.63 & 5.65 & 6.70 & 5 \\ 8 & 0 & 7.07 & 7.64 & 7.51 & 8 & 8.06 & 5.65 & 7.81 & 9.43 \\ 9.89 & 7.07 & 0 & 0.70 & 0.70 & 1.41 & 1 & 4.24 & 4.12 & 7.28 \\ 9.92 & 7.64 & 0.70 & 0 & 1 & 1.58 & 0.70 & 4.30 & 3.80 & 6.96 \\ 10.60 & 7.51 & 0.70 & 1 & 0 & 0.70 & 0.70 & 4.94 & 4.74 & 7.90 \\ 11.31 & 8 & 1.41 & 1.58 & 0.70 & 0 & 1 & 5.65 & 5.38 & 8.54 \\ 10.63 & 8.06 & 1 & 0.70 & 0.70 & 1 & 0 & 5 & 4.47 & 7.61 \\ 5.65 & 5.65 & 4.24 & 4.30 & 4.94 & 5.65 & 5 & 0 & 2.23 & 4.12 \\ 6.70 & 7.81 & 4.12 & 3.80 & 4.74 & 5.38 & 4.47 & 2.23 & 0 & 3.16 \\ 5 & 9.43 & 7.28 & 6.96 & 7.90 & 8.54 & 7.61 & 4.12 & 3.16 & 0 \end{pmatrix}$$

Après plongement isométrique dans le plan euclidien on obtient le graphique qui suit, où on peut vérifier que toutes les distances entre les protéines sont effectivement conservées.



On remarquera l'isolement de certains points et l'accumulation vers le point de coordonnées $(2, 1.5)$.

Une première question semble naturelle. Est-il possible de plonger n'importe quel espace métrique fini dans un Banach quelconque en conservant les distances, i.e isométriquement?

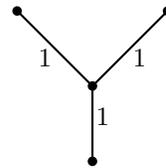
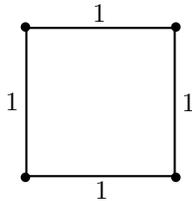
Le plongement de Fréchet apporte une réponse positive. Tout espace métrique fini M de cardinal n se plonge isométriquement dans l'espace de Banach ℓ_∞^n , qui est une généralisation de $(\mathbb{R}^2, d_\infty) := \ell_\infty^2$ en dimension n quelconque. Le plongement très simple est le suivant :

$$x \mapsto ((d(x, x_0) - d(x, t))_{t \in M}$$

Malheureusement ce Banach ne jouit pas de propriétés géométriques intéressantes et exploitables.

Il est relativement facile d'exhiber des espaces métriques qu'on ne peut représenter isométriquement dans le plan euclidien. Prenons par exemple quatre points situés à une distance 1 les uns des autres. Ces points ne peuvent exister dans le plan euclidien pour de simples raisons géométriques. Par contre ils existent dans l'espace euclidien à trois dimensions (\mathbb{R}^3, d_2) . Il suffit de considérer les 4 points de coordonnées $(0, 0, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Les deux exemples suivants nous montrent que la réponse peut être négative.



On muni ces deux graphes de leur distance géodesique naturelle. Ici toutes les arêtes ont le même poids 1. Les deux espaces métriques, ainsi construits, ne se plongent isométriquement dans aucun espace de Banach euclidien.

Résoudre les problèmes d’algorithmique de manière exacte peut s’avérer inextricable, mais la plupart du temps une résolution du problème approché est suffisante. Considérer des plongements avec une perte de précision, de disons 10% , sur les distances n’est pas incongru. On a donc la définition suivante:

Définition 3.2. *Soient (M, d) et (N, δ) deux espaces métriques. On appelle plongement métrique ou lipschitzien de M dans N une application f de M dans N telle qu’il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ et pour tous x, y dans M :*

$$\frac{1}{C_2}d(x, y) \leq \delta(f(x), f(y)) \leq C_1d(x, y)$$

La plus petite constante C_1 est appelée expansion ou constante de Lipschitz, et la plus petite constante C_2 contraction.

La distortion du plongement est le produit de la contraction par l’expansion. Si $C_1 = C_2 = 1$ le plongement est isométrique.

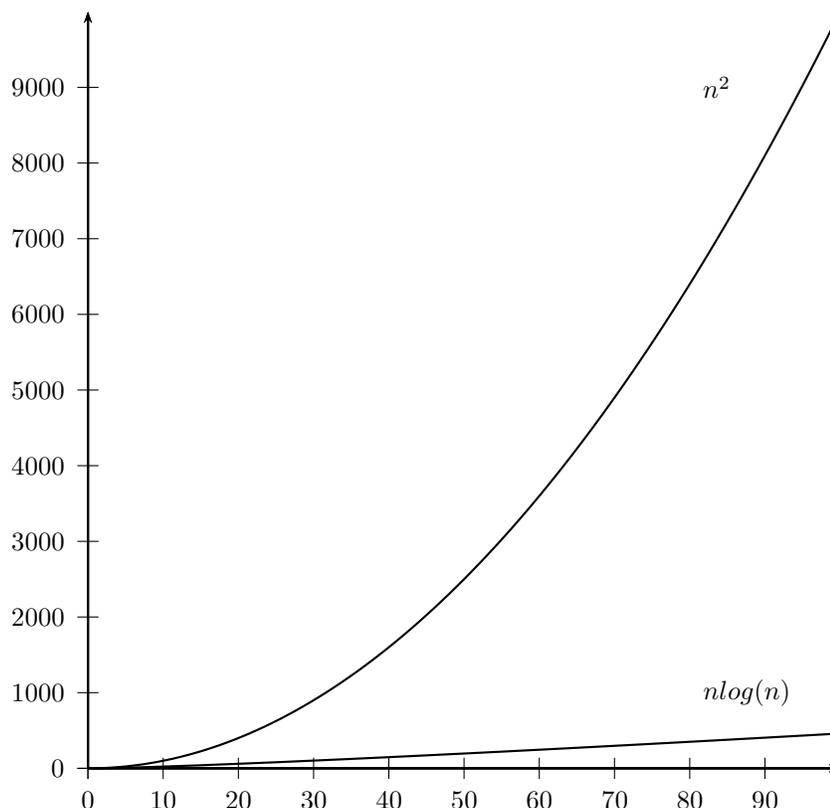
D’après les exemples que l’on vient de décrire, il apparaît que le plongement de certaines configurations de points impose une dimension minimum à l’espace d’arrivée (la dimension 3 dans le cas des 4 points à distance 1). Le lien entre la dimension de l’espace d’arrivée et la taille de l’ensemble source réside dans le théorème suivant qui témoigne de l’incompressibilité des espaces métriques généraux.

Théorème 3.1. *Si Z est un espace vectoriel normé tel que tous les espaces métriques de cardinal n se plongent métriquement dans Z avec une constante de distortion $D > 1$ fixée, alors :*

- (1) $\dim(Z) = \Omega(n)$ pour $D < 3$
- (2) $\dim(Z) = \Omega(\sqrt{n})$ pour $D < 5$
- (3) $\dim(Z) = \Omega(n^{\frac{1}{3}})$ pour $D < 7$,

où la notation $\dim(Z) = \Omega(n)$ signifie que la dimension de Z est minorée par Kn (K constante) lorsque n tend vers l’infini.

Si on autorise une perte sur la conservation des distances (distortion strictement plus grande que 1), alors on bénéficie de plongements dans des espaces de dimension plus petite. Ce théorème est la conséquence d’un théorème de Jonhson et Lindenstrauss “the flattening lemma” [13]. Ils prouvent que toute question métrique portant sur n points dans ℓ_2^n (espace euclidien de dimension n) peut être considérée dans $\ell_2^{\mathcal{O}(\log(n))}$ (espace euclidien de dimension inférieure à n lorsque n est grand), modulo une petite distortion des distances. Pratiquement, pour représenter n points de ℓ_2^n dans un ordinateur, il faut stocker n^2 valeurs. Stocker toutes les distances, nécessite aussi environ n^2 valeurs. D’après le “flattening lemma” il suffit de stocker environ $n \log(n)$ valeurs pour reconstruire toutes les distances, à la petite distortion près. Ce qui pour des grandes valeurs de n est un gain considérable comme l’illustre le graphique suivant :



Pour un graphe d’une centaine de noeuds on stocke moins de 1000 valeurs au lieu d’environ 10000 valeurs! Le plongement dans les espaces euclidiens du type ℓ_2^n est d’une importance considérable. La possibilité d’un tel plongement permet la mise un place d’algorithmes d’une redoutable efficacité.

Ce problème est la préoccupation majeure des concepteurs de moteurs de recherche sur Internet tels que Google, Yahoo, Altavista ou de bases de données, type Wikipédia. La rapidité de l’accès à l’information recherchée doit son salut essentiellement à l’efficacité de leurs algorithmes de recherche. Or ces moteurs de recherche ou ces bases de données sont parfaitement modélisables par des graphes, ce qui leur confère une structure d’espace métrique. Les résultats de plongement dans les espaces euclidiens assurent donc de l’existence et de l’efficacité de ces algorithmes de recherche. Quand on sait que ces graphes peuvent contenir plusieurs millions de noeuds, on comprend facilement l’importance d’un résultat tel que le “flattening lemma”! Ces algorithmes, bien entendu gardés secrets par leurs concepteurs, sont au centre d’enjeux économiques importants.

Historiquement Nathan Linial [18] a été le premier à remarquer en 1995 une connexion entre l’informatique théorique et la théorie non linéaire des espaces de Banach.

Les efforts des chercheurs se sont alors concentrés sur ce problème de la réduction de la dimension, car plus la dimension de l’espace d’arrivée est petite, plus efficaces sont les algorithmes. La “quête de la dimension” est toujours d’actualité...

Cette théorie des espaces métriques finis (sous-partie des mathématiques discrètes) est caractérisée comme étant asymptotique; on ne s'intéresse qu'à des ensembles finis de très grande taille.

Elle est approchée dans la mesure où, le problème n'est pas de répondre à la question "Le problème posé a-t-il une solution exacte ?" mais plutôt "Peut-on résoudre un problème approché en contrôlant l'erreur commise ?", ce qui dans la pratique est la plupart du temps satisfaisant.

Elle est aussi algorithmique, en effet à un résultat d'existence théorique, aussi intéressant soit-il, on en préférera un constructif et qui donnera lieu à une algorithmisation de sa preuve.

4. PLONGEMENT DE MÉTRIQUES INFINIS ET APPLICATIONS THÉORIQUES

Ce dont nous venons de parler, fortement lié à des problématiques concrètes, traite essentiellement d'espaces métriques finis, bien que de taille gigantesque. Une attention toute particulière est portée sur un contrôle aussi fin que possible de la distortion du plongement dans des espaces de dimension aussi petite que faire se peut.

Un autre aspect nettement plus théorique mais tout aussi fondamental concerne le plongement des espaces métriques finis ou infinis dans une classe d'espaces aussi large que possible. Désormais le contrôle de la distortion n'est plus aussi marqué. Cette approche est plus qualitative que quantitative.

4.1. Classification non linéaire des espaces de Banach. Tout d'abord nous aimerions définir une notion d'équivalence entre deux espaces de Banach. On veut identifier deux Banach si un certain nombre de bonnes propriétés sont présentes dans les deux espaces. Deux caractéristiques fondamentales des espaces de Banach sont la structure linéaire et les propriétés liées à la norme (la structure topologique). On identifiera deux espaces X et Y lorsqu'ils seront reliés par une bijection qui conservera les structures linéaire et topologique.

Les applications qui conservent ses deux aspects sont les applications linéaires bijectives f qui vérifient $C_1\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq C_2\|x - y\|$, (C_1 et C_2 étant des constantes positives). On les appelle *isomorphismes linéaires*.

Les normes introduites sont bien évidemment celles des espaces mis en jeu et on ne prendra pas la peine de les distinguer du point de vue typographique.

Les applications linéaires transforment une combinaison linéaire de l'espace de départ en la combinaison linéaire des images dans l'espace d'arrivée.

Une fois cette identification définie le problème se pose de la classification des espaces par rapport à cette équivalence. Tous les espaces de Banach sont-ils *linéairement isomorphes* ?

Mais approfondissons encore un peu plus la problématique de la classification. Rien ne nous empêche de définir d'autres notions d'équivalence plus ou moins complexes entre les espaces de Banach. Trois autres catégories sont importantes :

Si l'on cherche à conserver la structure linéaire et métrique (conservation des combinaisons linéaires et des distances) on utilisera des applications linéaires bijectives f qui vérifient $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$, que l'on appellera *isométries linéaires*. X et Y seront dits *linéairement isométriques*. Il est immédiat que dans ce cas la structure topologique est conservée.

D'autre part si l'on veut conserver la structure topologique mais pas celle linéaire on utilisera des applications bijectives non linéaires f qui vérifient

$C_1\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq C_2\|x - y\|$ que l'on appellera *isomorphismes lipschitziens*. X et Y seront dits *lipschitziennement isomorphes*.

Finalement, si seule la structure métrique nous intéresse (on ne considère l'espace de Banach qu'en tant qu'espace métrique) on effectuera l'identification au moyen d'applications bijectives non linéaires qui vérifient $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. La topologie est une nouvelle fois conservée. X et Y seront dits *isométriques*.

Pour ces trois nouvelles catégories le problème de la classification se pose aussi naturellement, ainsi que leurs éventuels liens. Présentons quelques résultats significatifs concernant ces différentes équivalences :

On remarquera qu'un isomorphisme linéaire est un isomorphisme lipschitzien.

Le théorème de Mazur-Ulam [19] affirme que deux espaces de Banach réels isométriques sont automatiquement linéairement isométriques. Ce qui signifie que la structure métrique d'un Banach détermine complètement sa structure linéaire.

En toute généralité un analogue à ce résultat est faux dans le cadre lipschitzien (lorsque l'on est moins rigide sur la conservation des distances). Il existe des espaces lipschitz-isomorphes qui ne sont pas linéairement isomorphes. Ces exemples sont dûs à Aharoni et Lindenstrauss [2]. Cependant sous certaines hypothèses sur les espaces on a des résultats positifs. Les preuves sont forcément délicates car on veut démontrer que posséder une structure pauvre implique que cette structure est en fait riche.

Deux questions naturelles font alors surface :

- (1) Dans quelle mesure la structure lipschitzienne donne-t-elle des indications sur la structure linéaire?
- (2) Peut-on caractériser une classe isomorphique au moyen d'un invariant métrique? Plus précisément, existe-il un espace métrique dont la présence dans un Banach témoigne de l'appartenance à une classe d'espaces mutuellement isomorphes?

Ces deux questions (on trouvera un exposé détaillé dans [7]) sont l'essence même de mon travail de recherche dont l'outil primordial est le plongement d'espaces métriques dans les espaces de Banach. Amplifions cet aspect des choses sur un exemple précis :

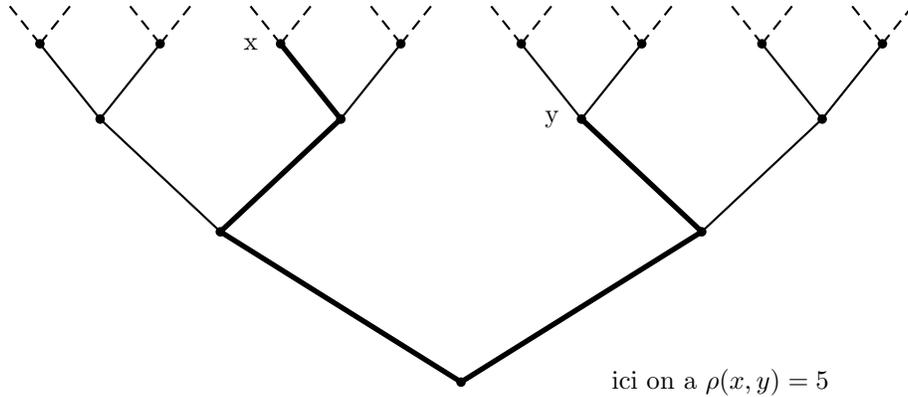
Un célèbre résultat d'Aharoni de 1974 [1] stipule qu'une large classe d'espaces métriques (les métriques séparables) se plongent lipschitziennement dans c_0 , l'espace de Banach des suites tendant vers 0 muni d'une norme qui est l'analogue en dimension infinie de la norme du maximum.

La réciproque est une question ouverte : si tous les espaces métriques séparables se plongent lipschitziennement dans un Banach X , X doit-il nécessairement contenir c_0 de façon linéaire? Cette question est équivalente à la suivante : c_0 se plonge lipschitziennement dans X implique-t-il que le plongement est forcément linéaire?

Le premier résultat de ma thèse [5] a été la démonstration de l'existence d'un invariant métrique, l'arbre diadique hyperbolique, pour une certaine classe isomorphique, les espaces de Banach super-réflexifs. La condition nécessaire est due à Bourgain [8].

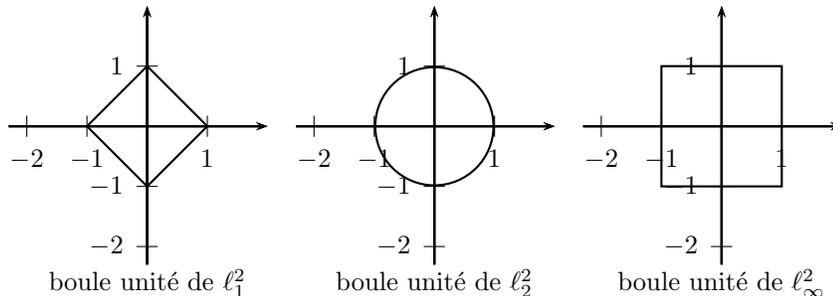
Théorème 4.1. *Un Banach X est non super-réflexif si et seulement si l'arbre diadique T , muni de la distance hyperbolique ρ , se plonge lipschitziennement dans X .*

Pour bien comprendre la définition de l'arbre hyperbolique regardons le dessin ci-dessous.



L'arbre diadique hyperbolique est le graphe infini à deux branchements où la distance entre deux points est le nombre de segments du plus court chemin les reliant. Cette distance est la distance naturelle sur l'arbre, vu comme un graphe infini dont tous les segments ont le poids 1.

Les Banach super-réflexifs sont caractérisés par une propriété géométrique, l'*uniforme convexité*. Un Banach est super-réflexif, si et seulement si, il est isomorphe à un Banach uniformément convexe. La super-réflexivité est une propriété stable par isomorphisme. Grosso modo, un Banach est uniformément convexe si sa boule unité est "bien ronde". En dimension finie tous les espaces de Banach sont isomorphes à un Banach uniformément convexe. Ce qui est faux en dimension infinie. Les pendants infini-dimensionnels de ℓ_1^2 et ℓ_∞^2 , notés ℓ_1 et ℓ_∞ , ne sont pas isomorphes à un Banach uniformément convexe alors que celui de ℓ_2^2 , l'espace de Hilbert ℓ_2 , l'est. Les "plats" visibles sur les boules de ℓ_1^2 et ℓ_∞^2 sont une obstruction à l'uniforme convexité. Bien que ℓ_∞^2 ne soit pas uniformément convexe, à une petite transformation près on peut rendre sa boule unité plus ronde. En effet en dimension finie on peut coincer un carré entre deux cercles très proches et "transformer" ainsi un carré en un cercle sans trop de difficultés. On peut "rendre" ℓ_∞^2 uniformément convexe, de même pour ℓ_1^2 . Or la dimension infinie rend impossible ce processus. Ces questions sont traitées abondamment dans [9].



En munissant T d'une nouvelle distance on peut caractériser la propriété isomorphe "avoir un type", que nous ne détaillerons pas ici. La recherche d'invariants métriques est au centre de nombreux travaux, en particulier ceux de Manor Mendel et Assaf Naor [20], et qui ont des applications en informatique théorique.

4.2. Plongement et conjectures de Baum-Connes ou Novikov. Une nouvelle intervention du problème de plongement est mis en évidence dans les travaux récents (2000 et 2006) de Gennadi Kasparov et Guoliang Yu [21][14] qui se font l'écho d'une direction de recherche suggérée par le franco-russe Misha Gromov.

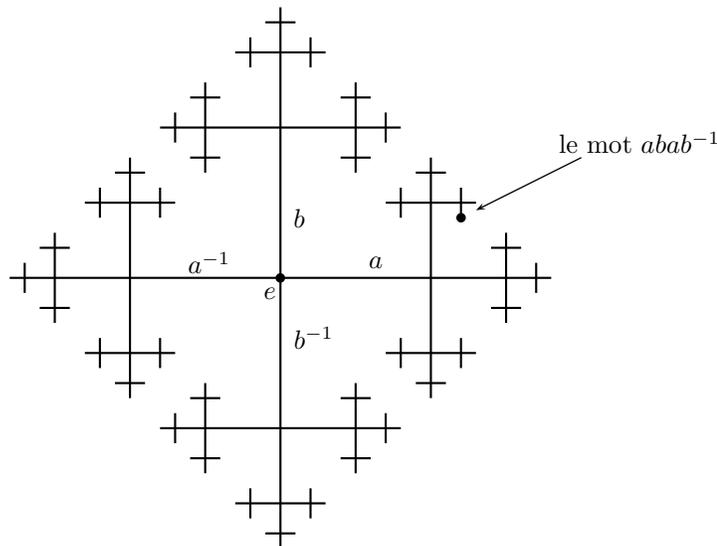
Les espaces métriques mis en jeu dans cette théorie sont les espaces métriques discrets à géométrie bornée. Donnons leurs définitions et quelques exemples.

Définition 4.1. *Un espace métrique (M, d) est :*

- (1) *discret si tous ses points sont isolés, i.e que tout point est entourable par une petite boule qui ne contient que lui.*
- (2) *localement fini si toutes ses boules, $B(x, r) = \{y \in M; d(x, y) \leq r\}$, ne contiennent qu'un nombre fini de points.*
- (3) *à géométrie bornée s'il est localement fini et si le nombre de points de chaque boules de rayon $r > 0$ est majoré en fonction de r .*

Exemple 4.1. *L'arbre hyperbolique est clairement un espace métrique à géométrie bornée. Tous les points sont écartés d'une distance 1, les boules de rayon 1 ont au plus 4 points, etc...*

Exemple 4.2. *Regardons maintenant un exemple issu de la théorie des groupes, qui est l'une des théories au coeur de ces conjectures. Donnons nous un alphabet de deux lettres a et b , pour lesquelles il existe deux lettres notées a^{-1} et b^{-1} , auxquelles on ajoute une lettre notée e (différente de a, b et ab), et qui vérifient les relations suivantes: $aa^{-1} = a^{-1}a = e$, $bb^{-1} = b^{-1}b = e$, $ae = ea = a$, $be = eb = b$. Aucune autre simplification n'est autorisée. Enumérer tous les mots irréductibles possibles à base des lettres a et b , c'est construire un graphe infini.*



Graphe de l'ensemble des mots irréductibles de longueur 4

On muni ce graphe de sa distance géodésique naturelle. Cela en fait un espace métrique à géométrie bornée. Ce graphe est l'espace métrique naturel que l'on associe au groupe libre à deux éléments \mathbb{F}_2 . Ce procédé se généralise à tous les groupes engendrés par un nombre fini d'éléments (ici a et b) et un nombre fini de relations.

Il est maintenant temps de citer les résultats de Yu et Kasparov-Yu.

Théorème 4.2 (Yu). *Si un espace métrique discret à géométrie bornée se plonge grossièrement dans un espace de Hilbert, alors il vérifie la conjecture grossière de Baum-Connes.*

Théorème 4.3 (Kasparov-Yu). *Si un espace métrique discret à géométrie bornée se plonge grossièrement dans un espace de Banach uniformément convexe, alors il vérifie la conjecture géométrique grossière de Novikov.*

Donner une signification précise aux conjectures de Baum-Connes et de Novikov grossières est totalement hors de portée de cet article. On ne définira pas non plus la notion de plongement grossier, mais on remarquera qu'un plongement lipschitzien est en particulier un plongement grossier. En effet un plongement lipschitzien rend compte de la structure microscopique et macroscopique de l'espace tandis qu'un plongement grossier ne témoigne que de celle macroscopique.

Malheureusement tout les espaces métriques à géométrie bornée ne se plongent pas dans un Banach uniformément convexe d'après V. Lafforgue [15]. Cependant tout résultat concernant le plongement grossier, ou mieux lipschitzien, d'une classe d'espaces métriques est une avancée dans la direction de ces théorèmes.

Une des contributions à ces questions, obtenue avec mon directeur de thèse Gilles Lancien [6] est la suivante:

Théorème 4.4. *Tout espace métrique localement fini se plonge lipschitzienement, et donc grossièrement, dans n'importe quel espace de Banach sans cotype.*

Un espace de Banach sans cotype est un espace qui contient "presque isométriquement" tous les espaces ℓ_∞^n . On mentionnera juste le fait qu'il n'existe aucun Banach uniformément convexe sans cotype. En revanche on peut construire des Banach sans cotype mais qui ont une propriété remarquable, plus faible que l'uniforme convexité, appelée *uniforme convexité asymptotique*. Si le résultat de Kasparov-Yu reste vrai dans ce cadre, alors le problème de la conjecture de Novikov grossière serait résolu pour les espaces métriques localement finis. A l'heure actuelle ce résultat, ou sa contradiction, ne sont toujours pas connus.

5. CONCLUSION

La mise en exergue des diverses interventions du plongement des espaces métriques traitée dans cet article, n'est évidemment pas exhaustive. Néanmoins, tant dans l'aspect théorique que pratique, la théorie non linéaire des espaces de Banach joue un rôle central. Le premier résultat de cette théorie semble être le théorème de Mazur-Ulam en 1932. Puis elle a connu un engouement certain dans les années 60 avec les travaux de Lindenstrauss [16] et une série de papiers, courts mais au combien élégants et fondateurs, d'Enflo [10],[11] et [12]. Jusqu'à la fin du $XX^{\text{ème}}$ siècle elle a été favorablement impactée par le foisonnement de résultats liés à la théorie linéaire. Mais depuis les années 2000 un regain d'activité, dû à l'intérêt croissant d'autres domaines, dont nous avons largement disserté au cours de cet

article, semble lui prédire un avenir radieux. L'efficacité et la rapidité avec laquelle nos connaissances en la matière évolueront, passent inévitablement par une interaction incessante entre les divers spécialistes impliqués. Tel est l'enjeu des recherches futures.

REFERENCES

- [1] I. Aharoni, *Every separable metric space is Lipschitz equivalent to a subset of c_0^+* . Israel J. Math. **19** (1974), 284-291.
- [2] I. Aharoni et J. Lindenstauss, *Uniform equivalence between Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), 281-283.
- [3] F. Albiac et N. J. Kalton, *Topics in Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 233, Springer, New York, 2006.
- [4] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932.
- [5] F. Baudier, *Metrical characterization of super-reflexivity and linear type of Banach spaces*, Archiv Math. **89** (2007), 419-429.
- [6] F. Baudier et G. Lancien, *Embeddings of locally finite metric spaces into Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **136** (2008), 1029-1033.
- [7] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric non linear functional analysis. Vol. 1*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 48, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [8] J. Bourgain, *The metrical interpretation of super-reflexivity in Banach spaces*, Israel J. Math. **56** (1986), 221-230.
- [9] R. Deville, G. Godefroy et V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 64, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.
- [10] P. Enflo, *On the non existence of uniform homeomorphisms between L_p -spaces*, Ark. Math. **8** (1969), 103-105.
- [11] P. Enflo, *On a problem of Smirnov*, Ark. Math. **8** (1969), 107-109.
- [12] P. Enflo, *Banach spaces which can be given an equivalently uniformly convex norm*, Israel J. Math. **13** (1972), 281-288.
- [13] W. B. Johnson et J. Lindenstrauss, *Extensions of Lipschitz mappings into a Hilbert space*, Conference in modern analysis and probability (New Haven, Conn., 1982), Amer. Math. Soc., Providence RI, (1984), 189-206.
- [14] G. Kasparov et G. Yu, *The coarse Novikov conjecture and uniform convexity*, Advances Math. à paraître.
- [15] V. Lafforgue, *Un renforcement de la propriété (T)*, à paraître.
- [16] J. Lindenstrauss, *On non linear projections in Banach spaces*, Michigan Math. J. **11** (1964), 263-287.
- [17] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I*, Springer Berlin 1977.
- [18] N. Liial, E. London et Y. Rabinovich, *The geometry of graphs and some of its algorithmic applications*, Combinatorica **15** (1995), 215-245.
- [19] S. Mazur et S. Ulam, *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 946-948.
- [20] M. Mendel et A. Naor, *Metric cotype*, Ann. Math. à paraître.
- [21] G. Yu, *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admits a uniformly embedding into Hilbert space*, Invent. Math. **139** (2000), 201-240.