XXIV^e congrès national d'analyse numérique
Vittel, 25-28 mai 1992.

1881

PRÉCONDITIONNEMENT DU PROBLÈME DE STOKES

MEJDI AZAIEZ ET JEAN-LUC GUERMOND *

Résumé. Un préconditionnement est présenté pour les équations de Stokes à très grand nombre de Reynolds. On démontre la convergence de la solution du système approché vers la solution exacte lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini.

Mots clefs. Stokes, Perturbations singulières, Préconditionnement.

1. Introduction. On considère l'écoulement instationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans un domaine Ω ouvert borné connexe li pschtizien de $\mathbb{R}^n$. L'approximation temporelle du problème de Navier-Stokes conduit pour chaque pas de temps à un système de Stokes du type:

$$u_\epsilon - \epsilon\nabla^2 u_\epsilon + \nabla p_\epsilon = f, \qquad \nabla . u_\epsilon = 0, \qquad u_{\epsilon|\partial\Omega} = 0 \tag{1.1}$$

où, par exemple, $\epsilon = \Delta t/2Re$ si l'évolution temporelle de la diffusion visqueuse est approchée par un schéma de Crank–Nicolson. Le problème est bien posé dans $\mathbb{H}^{-1}(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$ si f est dans $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ et la solution (u_ϵ, p_ϵ) est dans $\mathbb{H}^1_0(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$ [4], [5].

2. Discrétisation. L'approximation de la formulation variationnelle associée à (1.1) à l'aide d'une approximation stable et convergente conduit à un système algébrique du type:

$$\begin{aligned} A_\epsilon U_\epsilon + B^T P_\epsilon &= F \\ BU_\epsilon &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

où les matrices A_ϵ et B^T correspondent respectivement à la discrétisation des opérateurs $Id - \epsilon\nabla^2$ et divergence. A_ϵ est symétrique définie positive et B satisfait une condition "inf-sup" de telle sorte que le système linéaire soit bien posé. Pour résoudre (2.1) on choisit d'éliminer la vitesse de manière que la pression soit solution de:

$$BA_\epsilon^{-1}B^T P_\epsilon = BA_\epsilon^{-1}F \tag{2.2}$$

où $BA_\epsilon^{-1}B^T$ désigne l'opérateur d'Uzawa discret [3]. Il est alors possible de résoudre le système obtenu par une méthode itérative du type gradient conjugué. Afin d'accélérer la convergence du processus itératif on se propose de le préconditionner.

3. Préconditionnement. Un préconditionnement classique de (2.2) consiste à éliminer la diffusion visqueuse dans (1.1) et à résoudre un problème de Poisson avec condition de Neumann homogène sur la pression (e.g. voir [3]). C'est aussi sur cette idée que repose la méthode de projection [5] [6]. Par la suite on donne quelques arguments théoriques justifiant cette approche.

Dans le cas présent, l'idée naturelle pour préconditionner (2.2) consiste à approcher l'opérateur A_ϵ^{-1} par A_0^{-1} en posant $\epsilon = 0$. Pour fixer les idées dans le cadre d'une

* Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur (LIMSI-CNRS), Université Paris Sud, Bat 508, BP 133, 91403, Orsay Cedex

approximation de Galerkin, l'opérateur A_0 est donné par $A_{0ij} = (u_i, u_j)$ où les $(u_i)_{i\in I}$ constituent une base de l'espace d'approximation et $(.,.)$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Pour une méthode spectrale on manipule des bases orthonormées et donc on a $A_0 = Id$ (cf. [1]).

Soit (U_0, P_0) la solution du problème (Q_0):

$$\begin{aligned} BA_0^{-1}B^T P_0 &= BA_0^{-1}F \\ U_0 &= A_0^{-1}(F - B^T P_0) \end{aligned} \tag{3.1}$$

La question naturelle qui se pose alors est de savoir si (U_0, P_0) est une bonne approximation de (U_ϵ, P_ϵ) quand ϵ tend vers zéro. Pour répondre à cette question on établit le résultat suivant:

Théorème 3.1. *Si Ω est C^2 et $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ alors $u_\epsilon \longrightarrow u_0$ dans H et $p_\epsilon \longrightarrow p_0$ dans $L_0^2(\Omega)$, où $H = \{v \in \mathbb{L}^2(\Omega), \nabla.v = 0, v.n_{|\partial\Omega} = 0\}$ et (u_0, p_0) est la solution de*

$$u_0 + \nabla p_0 = f, \qquad \nabla.u_0 = 0, \qquad u_0.n_{|\partial\Omega} = 0 \tag{3.2}$$

Preuve. La démonstration repose sur les propriétés de la régularisée de Yosida de l'opérateur de Hemholtz $Id - \epsilon\nabla^2$, cf. [2] pour les détails □

De plus on peut montrer [2] que si Ω n'est que lipschitzien et $f \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, la convergence de p_ϵ vers p_0 se fait toujours dans $L_0^2(\Omega)$ et celle de u_ϵ se fait dans le dual de $V = \{v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \nabla.v = 0\}$. Ce résultat améliore notablement le résultat de convergence de la pression établi pour la méthode de projection [5], [6].

Notez que $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ étant dense dans H toute approximation conforme de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ est une approximation conforme de H et donc pour l'approximation du système (3.2) on peut utiliser les mêmes opérateurs discrets que dans le cas du système de Stokes initial. Ainsi la discrétisation de (3.2) conduit au problème (Q_0), et donc en vertu du théorème ci-dessus, (U_0, P_0) est une bonne approximation de (U_ϵ, P_ϵ).

La méthode présentée ici a été testée dans le cadre d'une approximation spectrale du problème de Stokes tridimensionnel à haut Reynolds et a permis de résoudre le systéme itératif en un nombre d'itérations nettement inférieur à celui nécessaire pour la résolution sans préconditionnement (cf. [1] pour d'autre détails).

RÉFÉRENCES

[1] M. AZAIEZ, A. FIKRI, G. LABROSSE, *Direct simulation of 3-D driven cavity flow by collocation spectral method*, ICOSAHOM 92, Montpellier, 1992.

[2] M. AZAIEZ, J.-L. GUERMOND, Perturbation singulière du problème de Stokes, en préparation.

[3] J. CAHOUET, J.-P. CHABARD, *Some fast 3-D finite element solvers for generalized Stokes problem*, Rapport EDF HE/41/87.03, 1987.

[4] V. GIRAULT, P.-A. RAVIART, *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations*, Springer Series in Computational Mathematics 5, Springer–Verlag, 1986.

[5] R. TEMAM, *Navier–Stokes Equations*, Studies in Mathematics and its Applications 2, North-Holland, 1977.

[6] R. TEMAM, Remark on the pressure boundary condition for projection method, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 3, 1991, 181-184.