

Propagation du son dans un gaz saturant une structure poreuse : effets thermiques

M. Firdaouss* - J.L. Guermond* - D. Lafarge** - O. Pironneau***

* L.I.M.S.I. - UPR CNRS 3251 - BP 133, 91403 ORSAY Cedex.

** L.A.U.M. - URA CNRS 1101 - BP 535, 72017 LE MANS Cedex.

*** L.A.N. - UPMC CNRS - tour 55-65 - 4 place Jussieu - 75252 PARIS Cedex.

Résumé

On étudie la relaxation thermique qui s'effectue lors de la propagation du son dans un milieu poreux à structure rigide saturé d'un gaz. On calcule la compressibilité thermique en approchant par une technique d'éléments finis la solution d'un problème canonique fourni par la théorie de l'homogénéisation. On montre que deux modèles semi-analytiques de la relaxation thermique sont en bon accord avec les simulations numériques sur une large gamme de porosités.

1 Introduction

Les matériaux poreux à porosité ouverte tels que les laines de verre, mousses plastiques réticulées (à bulles éclatées) sont largement utilisés en acoustique aérienne pour leurs propriétés d'absorption du son. Ils sont souvent utilisés en multicouche. On peut citer à titre d'exemple les problèmes d'isolation phonique dans l'industrie du bâtiment ou dans les industries mécaniques telles les industries aéronautiques ou automobiles. D'une façon générale les équations de l'acoustique dans des milieux poreux à structure rigide (*ie.* beaucoup plus rigide que le fluide) s'écrivent en régime harmonique

$$\rho_0 \alpha(\omega) \frac{\partial U}{\partial t} = \nabla P, \quad \frac{\beta(\omega)}{K_a} \frac{\partial P}{\partial t} = -\nabla \cdot U \quad (1)$$

où ω est la pulsation et U , P sont la vitesse et la pression macroscopique. La connaissance des deux fonctions $\alpha(\omega)$ et $\beta(\omega)$ détermine complètement les propriétés de propagation du milieu. Différents modèles semi-analytiques ont été proposés pour décrire ces fonctions en terme de quelques paramètres géométriques. L'objectif du présent travail est de tester par une résolution numérique d'un problème canonique la pertinence de certains de ces modèles pour la fonction $\beta(\omega)$.

2 Homogénéisation

Au niveau microscopique, la dynamique du fluide est décrite par les équations de Stokes-Fourier

$$\begin{cases} -i\omega\rho_0 u = -\nabla p + \eta\nabla^2 u + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta\right)\nabla\nabla \cdot u, \\ -\frac{i\omega}{K_0}(p - \beta_0 K_0 \tau) = -\nabla \cdot u, \\ i\omega\rho_0 C_p \tau = -i\omega\beta_0 T_0 p + \kappa\nabla^2 \tau. \end{cases} \quad (2)$$

où u , p et τ sont les perturbations de vitesse, pression et température par rapport au repos. Les coefficients ρ_0 , T_0 , η , ζ , K_0 , β_0 , C_p et κ sont respectivement la masse volumique au repos, la température au repos, les première et seconde viscosités dynamiques, le module d'incompressibilité

isothermal, le coefficient de dilation thermique, la chaleur spécifique à pression constante et le coefficient de conduction thermique du fluide. Ces équations sont complétées par les conditions aux limites

$$u_{|\partial\Omega} = 0, \quad \tau_{\partial\Omega} = 0 \quad (3)$$

où $\partial\Omega$ est l'interface solide/fluide. La condition $\tau_{\partial\Omega} = 0$ se justifie par le fait que le solide a une grande capacité calorifique par rapport au gaz saturant.

En supposant que la longueur d'onde des perturbations acoustiques reste grande devant toute longueur microscopique (hypothèse réalisée des basses fréquences jusqu'aux ultra-sons basse fréquence) et en supposant (pour les besoins de la démonstration) le milieu solide périodique, la technique classique d'homogénéisation par développement en double échelle (cf. Levy-Sanchez [6], Lafarge [5]) permet de montrer que les quantités moyennes $\langle u \rangle = U$ et $\langle p \rangle = P$ satisfont les équations (1), où $\alpha(\omega)$ et $\beta(\omega)$ sont déterminées en résolvant les deux problèmes microscopiques élémentaires suivants

$$\begin{cases} -i\frac{\omega}{\nu}v - \nabla^2v + \nabla\pi = e, \\ \nabla \cdot v = 0, \\ v_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

où e est un vecteur unitaire, ν la viscosité cinématique, et v et π sont périodiques.

$$\begin{cases} -i\frac{\omega}{\nu'}\theta - \nabla^2\theta = 1, \\ \theta_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

où $\nu' = \nu/P_r$, (P_r étant le nombre de Prandtl).

On montre (cf. Levy-Sanchez [6], Lafarge [5]), en supposant que la vitesse moyenne $\langle v \rangle$ est toujours alignée avec e (matériau isotrope), que $\alpha(\omega)$ se déduit de $\langle v \rangle$ par

$$\alpha(\omega) = \frac{\nu\phi}{-i\omega \langle v \rangle \cdot e} \quad (6)$$

où ϕ est la porosité, et $\langle v \rangle$ est la moyenne sur le volume total de la cellule périodique, la vitesse v étant prolongée par zéro dans le solide. La fonction $\beta(\omega)$ est donnée par

$$\beta(\omega) = \gamma \left(1 + \frac{i\omega(\gamma - 1)}{\nu'\gamma\phi} \langle \theta \rangle \right) \quad (7)$$

Ici encore θ est prolongé par zéro dans le solide pour le calcul de $\langle \theta \rangle$.

Il est remarquable que la fonction $\alpha(\omega)$ s'obtient en résolvant un problème de Stokes complexe, et la fonction $\beta(\omega)$ en résolvant une équation de la chaleur complexe (ie. ces fonctions prennent séparément en compte les effets visqueux et thermiques).

3 Détermination numérique de $\beta(\omega)$

Par la suite on ne s'intéresse qu'à la détermination de la fonction $\beta(\omega)$ en dimension 2 pour un réseau carré de cylindres solides, cf. figure 1 (modélisation très simplifiée d'une laine de verre).

Après réduction par symétrie, on résout le problème suivant

$$\begin{cases} -i\frac{\omega}{\nu'}\theta - \nabla^2\theta = 1, \\ \theta_{|\partial\Omega_1} = 0, \\ \frac{\partial\theta}{\partial n}|_{\Omega_2} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

où le domaine de calcul et les frontières $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$ sont définis sur la figure 2.

On calcule une solution approchée par une technique d'approximation par éléments finis P_1 . On utilise le logiciel GFEM développé par O. Pironneau. Un exemple de maillage est montré sur la figure 2.

4 Les modèles semi-analytiques

Pour définir les deux modèles semi-analytiques considérés par la suite, nous introduisons une fonction de relaxation $\chi'(\omega)$ valant 1 aux basses fréquences (état relaxé où les échanges thermiques avec la structure imposent une évolution isotherme) et 0 à la limite des hautes fréquences (les échanges thermiques n'ont pas le temps de se faire et l'évolution est adiabatique). L'introduction d'une telle fonction de relaxation est cohérente avec l'écriture formelle suivante

$$\langle \theta \rangle = \frac{\phi\nu'}{-i\omega}(1 - \chi'(\omega)). \quad (9)$$

La fonction $\chi'(\omega)$ est nécessairement une fonction analytique dont les pôles sont situés sur l'axe imaginaire négatif (*cf.* Lafarge [5]). Cette condition jointe aux limites imposées HF et BF rappelées ci-dessous, impose de fortes contraintes sur le comportement de $\chi'(\omega)$ sur tout l'axe réel. Aux hautes fréquences, la condition physique à respecter est (*cf.* Champoux-Allard [1])

$$\chi'(\omega) \propto (2i\omega\Theta'_\infty)^{1/2}, \quad (10)$$

où Θ'_∞ est un temps caractéristique donné par

$$\Theta'_\infty = (\Lambda')^2/8\nu', \quad (11)$$

avec Λ' la longueur thermique caractéristique (*ie.* $2 \times (\text{volume des pores}/\text{surface des pores})$). Aux basses fréquences, la condition est (*cf.* Lafarge [5])

$$\chi'(\omega) \simeq 1 + i\omega\Theta'_0 - r(\omega\Theta'_0)^2, \quad (12)$$

où Θ'_0 est un temps caractéristique différent de Θ'_∞ , et r est un facteur de forme, tous deux sont reliés de manière exacte au champ des températures à $\omega = 0$. On montre [5] que

$$\langle \theta(0) \rangle = \phi\nu'\Theta'_0, \quad r = \frac{\langle \theta^2(0) \rangle}{\langle \theta(0) \rangle^2}. \quad (13)$$

L'expression la plus simple pour $\chi'(\omega)$ qui respecte ces limites ainsi que les conditions d'analyticité est donnée par (*cf.* Pride et al. [3])

$$\frac{1}{\chi'(\omega)} = 1 - \frac{ix}{F(x)}. \quad (14)$$

avec

$$x = \omega\Theta'_0, \quad F(x) = 1 - p' + p' \left(1 - \frac{ixC'^2}{2p'^2}\right)^{1/2}. \quad (15)$$

Par définition, les deux facteurs de forme C' et p' sont

$$C' = \frac{\Theta'_0}{\Theta'_\infty}, \quad \frac{C'}{4p'} + 1 = r. \quad (16)$$

Ce modèle est noté ici PMG en référence à Pride et al. [3] qui ont proposé un modèle analogue pour les effets visqueux. Un modèle plus simple – JKD (*cf.* Johnson et al. [2]) – peut être obtenu si les deux premiers termes seulement sont retenus dans la limite BF de $\chi'(\omega)$. Dans ce cas $F(x)$ se simplifie en posant $p' = 1$ dans (15).

5 Résultats et Analyse

Lors des simulations numériques par éléments finis on a fait varier la porosité ϕ entre 0.3 et 0.99. Les résultats les plus significatifs sont reportés sur les figures 3 à 7. La décroissance rapide des facteurs C' et p' qui s'annulent à la limite diluée (cf. figure 3) traduit l'existence de deux longueurs très différentes dans le problème – rayon des cylindres et distance entre cylindres – qui ne sont pas mesurées de la même manière par les champs de température HF et BF. La situation HF "gelée" est celle de cylindres "indépendants", au sens où la dissipation autour de chaque cylindre s'opère indépendamment de la présence des cylindres voisins. Elle est essentiellement gouvernée par le rayon des cylindres. Le temps "gelé" Θ'_∞ varie (à dimension fixée de la cellule élémentaire) en $\frac{1}{R^2}$ où R est ce rayon. Le temps de relaxation Θ'_0 "relaxé" correspond au contraire à un effet coopératif déterminé par la distance entre cylindres, et il est donc d'ordre 1; d'où $\Theta'_0 \ll \Theta'_\infty$ et $C' = 0$. Hormis cette limite diluée singulière, il apparaît que le facteur p' reste remarquablement constant autour de $p' \simeq 0.42$.

En échelle logarithmique usuelle, pour la température macroscopique $\langle \theta \rangle$ en fonction de la fréquence (cf. figures 4, 5, 6, et 7) les déviations entre les prédictions du modèle JKD et le calcul GFEM apparaissent aux faibles porosités pour $1 \leq \omega \leq 100$; dans ce domaine de fréquences, les parties réelles et imaginaires de $\langle \theta \rangle$ sont du même ordre de grandeur. Dans notre cas, les faibles porosités correspondent à un rétrécissement prononcé des "pores". La tendance observée rejoint une observation similaire faite par Pride et al. [3] dans le cas de la perméabilité visqueuse. Cet effet signifie une augmentation supplémentaire de la capacité calorifique effective du gaz saturant aux basses fréquences, par rapport à celle prévue par le modèle JKD. L'introduction du paramètre p' élimine pratiquement tout écart entre le modèle et le calcul, montrant ainsi qu'en pratique la relaxation thermique dépend au plus de trois paramètres géométriques indépendants. Les écarts résiduels entre le calcul GFEM et le modèle PMG concernent principalement les faibles porosités. Pour les grandes dilutions, on note que l'accord entre les simulations GFEM et le modèle JKD n'a pas été dégradé en proportion de l'écart entre la valeur du facteur de forme p' , proche de zéro, et l'approximation JKD qui consiste à poser $p' = 1$. En effet d'après les équations (15) et (16) ce facteur intervient via le rapport $\frac{C'}{p'}$ qui tend vers zéro de même que C' à la limite diluée (cf. figure 3). Ainsi, dans cette limite le modèle JKD estime correctement $r \simeq 1$.

6 Conclusion

La présente étude montre que les modèles semi-analytiques développés pour décrire la relaxation visqueuse décrivent également de manière précise, après adaptation convenable des paramètres utilisés, la relaxation thermique lors de la propagation du son dans un matériau à structure rigide saturé d'un gaz. Pour les faibles porosités, le modèle JKD est un peu moins précis que le modèle PMG pour $1 \leq \omega \leq 100$ du fait qu'il ne comporte pas de calage de la partie imaginaire aux basses fréquences.

References

- [1] CHAMPOUX (Y.) et ALLARD (J.F.) - *Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media*, J. Appl. Phys., Vol. 70(4), 1991, p. 1975–1979.
- [2] JOHNSON (D.L.) KOPLIK (J.) et DASHEN (R.) - *Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media*, J. Fluid Mech., Vol. 176, 1987, p. 379–402.
- [3] PRIDE (S.R.) MORGAN (F.D.) et GANGI (A.F.) - *Drag forces of porous-medium acoustics*, Phys. Rev., Vol. 47(9), 1993, p. 4964–4978.

- [4] LAFARGE (D.) - *Propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide viscothermique*, Thèse de doctorat de l'Université de Maine, 1993.
- [5] LAFARGE (D.) - *Sound propagation in rigid porous materials saturated with a viscothermal fluid*, Rapport interne LAUM, 1995.
- [6] LEVY (Th.) et SANCHEZ-PALENCIA (E.) - *Equations and Interface Conditions for Acoustic Phenomena in Porous Media*, *J. Math. Analysis and Applications*, Vol. 61(3), 1977, p. 813-834.

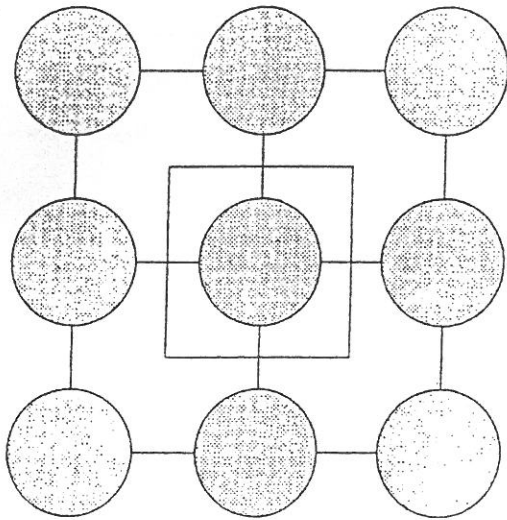


Figure 1: Réseau carré de cylindres.

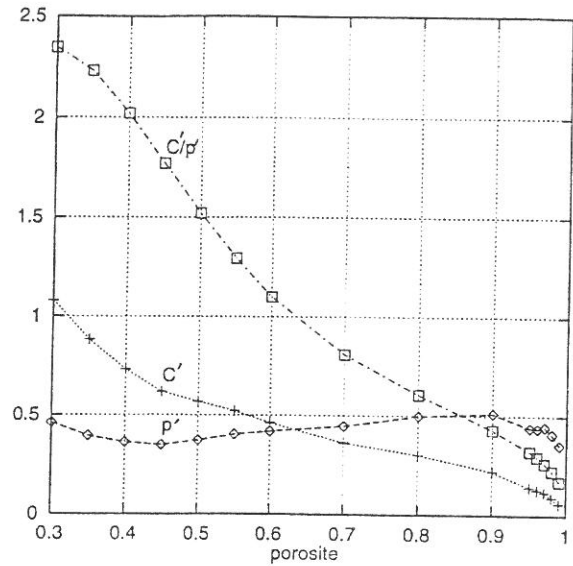


Figure 3: Dépendance des coefficients C' et p' des modèles JKD et PMG pour différentes porosités ($0.3 \leq \phi \leq 0.99$).

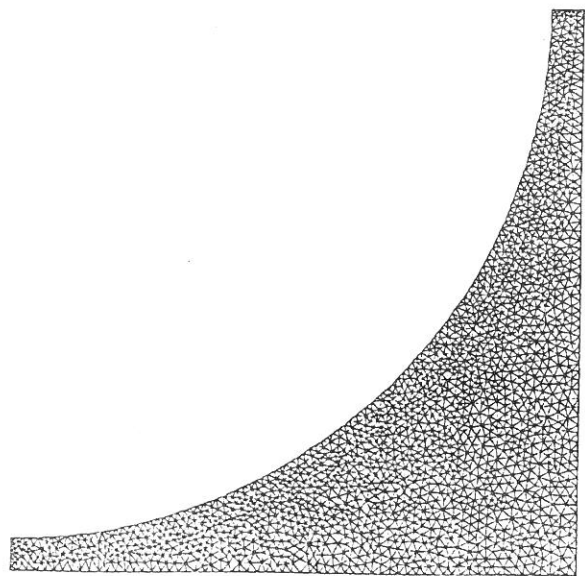
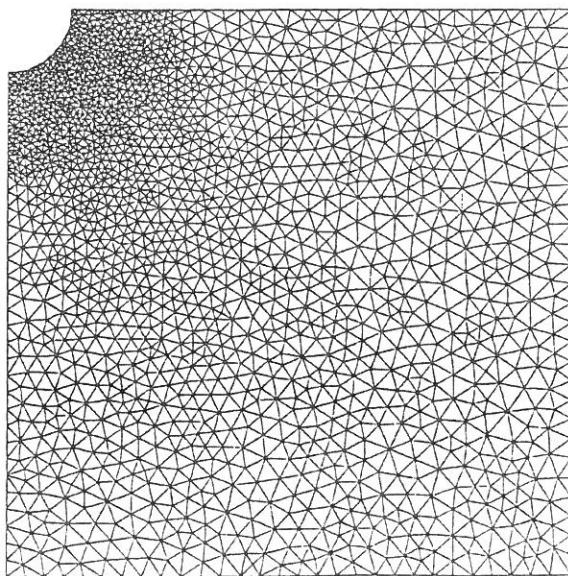


Figure 2: Domaine de calcul réduit par symétries. Le maillage est représenté pour les porosités 0.99 et 0.3.

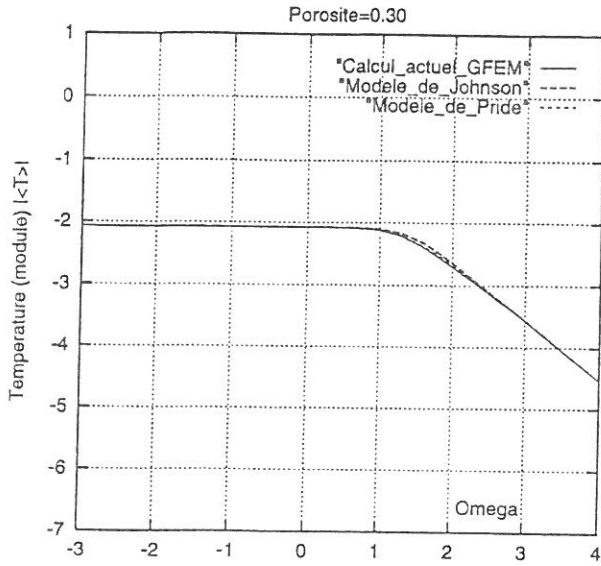


Figure 4: Module de $\langle \theta \rangle$ en fonction de ω pour une porosité $\phi = 0.3$. Comparaison du calcul GFEM et des modèles JKD et PMG.

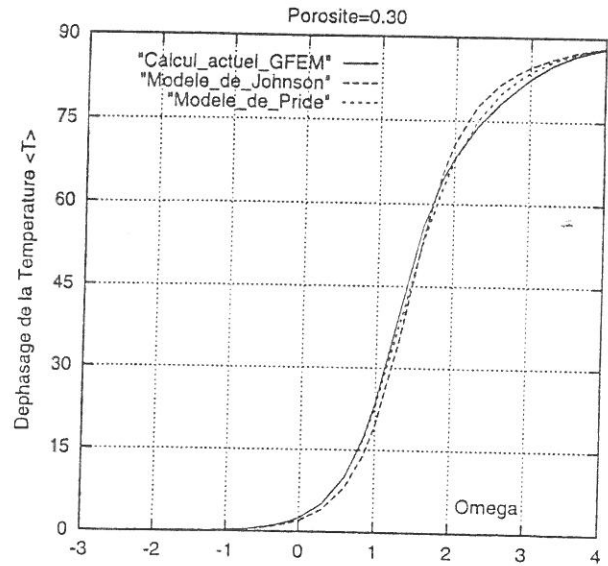


Figure 5: Phase de $\langle \theta \rangle$ en fonction de ω , porosité $\phi = 0.3$.

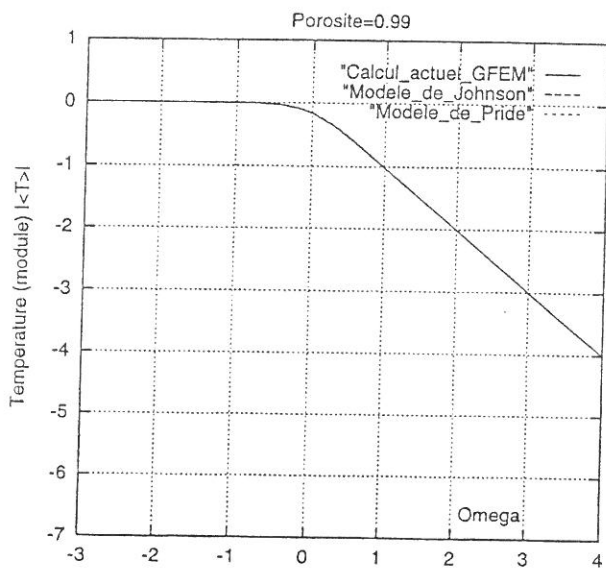


Figure 6: Module de $\langle \theta \rangle$ en fonction de ω pour une porosité $\phi = 0.99$. Comparaison du calcul GFEM et des modèles JKD et PMG.

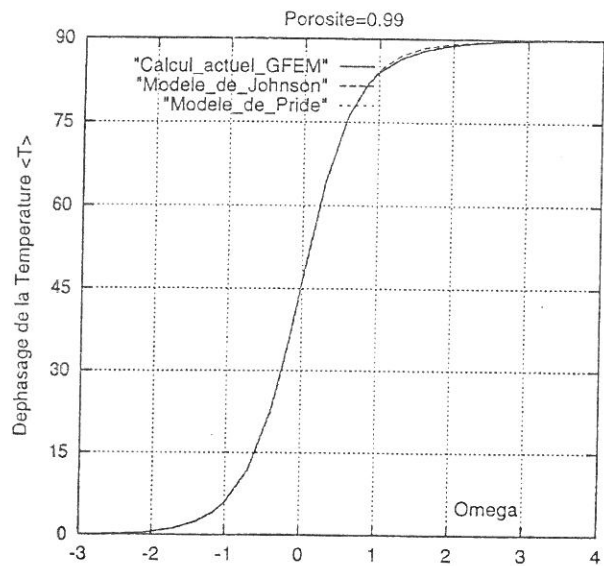


Figure 7: Phase de $\langle \theta \rangle$ en fonction de ω , porosité $\phi = 0.99$.

CONGRÈS
SFA
95

RÉSUMÉS
DES
CONFÉRENCES GÉNÉRALES
ET DES
COMMUNICATIONS

17 - 18 - 19 MAI 1995

Laboratoire d'Études Thermiques [U.R.A. C.N.R.S. 1403] E.N.S.M.A. - Futuroscope - Poitiers

