

Méthodes numériques appliquées à la mécanique/*Computational Mechanics*  
(Mécanique des fluides/*Fluid Mechanics*)

## Simulation des écoulements visqueux bidimensionnels par une méthode de décomposition de domaines

Jean-Luc GUERMOND, Serge HUBERSON et When-Zhong SHEN

**Résumé** – On présente une méthode de décomposition de domaine pour simuler les écoulements externes incompressibles de fluides réels. On utilise une méthode particulière dans la région de l'écoulement qui est dominée par la convection, alors qu'une méthode de différences finies est utilisée dans les régions dominées par la diffusion visqueuse. Quelques résultats numériques sont présentés.

### Simulation of 2D external viscous flows by means of a domain decomposition method

**Abstract** – Two-dimensional external viscous flows are numerically approximated by means of a domain decomposition technique which combines a vortex method and a finite difference method. The vortex method is used in the flow region which is dominated by convective effects, whereas the finite difference method is used in the flow region where viscous diffusion effects are dominant.

**Abridged English Version** (Equation numbers refer to the French version). – Visualization of incompressible viscous flows shows that vorticity concentrates in wakes and advection dominates viscous diffusion as the Reynolds number increases. These conditions are favourable for modelling such flows by means of particle methods. Furthermore since this class of methods is grid-free, it is suitable for tackling problems with moving boundaries. However, particle methods are inaccurate as viscous effects are of the same order as that of advection. Hence, in boundary layers Eulerian methods are needed (e.g. finite differences, finite elements, etc.). The remarks above led us to develop a domain decomposition method that combines advantage of Lagrangian and Eulerian approaches (*cf.* [5], [8]).

Consider  $p$  moving solids  $(S_i)_{i=1, \dots, p}$  in a inertial frame of reference  $(O, i, j)$  of  $\mathbb{R}^2$ . Let  $\mathbf{k} = i \times j$ , define  $(O_i)_{i=1, \dots, p}$  origins of reference for each solid, and let  $\mathbf{v}_i$  (resp.  $\Omega_i$ ) be the velocity of  $O_i$  (resp. the angular velocity of  $S_i$ ). The solids are immersed in an incompressible Newtonian fluid which is at rest at infinity. The fluid domain, denoted by  $\mathcal{D}$ , is decomposed into  $p+1$  open subdomains so that  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \cup \bigcup_{i=1, \dots, p} \mathcal{D}_i$ , where the subdomains

$\mathcal{D}_i$  are homeomorphic to a disc with a hole. It is hereafter assumed that the domain decomposition has been done so that convective effects are dominant in  $\mathcal{D}_0$ . Let  $B_i$  (resp.  $\Gamma_i$ ) be the interface between  $\mathcal{D}_i$  and  $S_i$  (resp.  $\mathcal{D}_0$ ), and  $\mathbf{n}_i$  be the outward normal to the boundary of  $\mathcal{D}_i$  for  $i=0, \dots, p$ . In  $\mathcal{D}_0$  the Navier-Stokes equations are formulated in terms of velocity and vorticity  $(\mathbf{u}_0, \omega_0)$  and are approximated by means of a particle method, whereas in each subdomain  $\mathcal{D}_i$  they are formulated in terms of stream function and vorticity  $(\psi_i, \omega_i)$  and are approximated by means of finite differences. Let  $T > 0$  and  $N \in \mathbb{N}$ , the Navier-Stokes problem is solved in  $[0, T]$ . Let  $\delta t = T/N$  and  $t_k = k \delta t$  so that  $0 \leq k \leq N$ . Approximations of  $(\mathbf{u}_0, \omega_0)$  and  $(\psi_i, \omega_i)$  are sought in parallel in the time interval  $(t_k, t_{k+1})$ .

Let  $\mathbf{v}_\infty(t)$  be the mean velocity of the  $p$  solids. In  $\mathcal{D}_0$ , the fluid motion is studied in a frame of reference which moves with velocity  $\mathbf{u}_\infty(t)$ . The advection-diffusion equation of  $\omega_0$  is approximated by (3.1) and  $\mathbf{u}_0$  is given by (3.2).

Note présentée par Paul GERMAIN.

To be well posed, the problem requires that some transmission condition through  $\Gamma_i$  is imposed on  $\omega_i$ . Such a condition is obtained by taking into account the fact that in the vicinity of  $\Gamma_i$  viscous diffusion is dominated by advection. Hence (3.1) can locally be considered as a hyperbolic equation whose right hand side,  $v \nabla^2 \omega_0^{k+1}$ , is a perturbation. As a result, Dirichlet conditions (3.3) must be imposed on the subset of  $\Gamma_i$  where the flow enters  $\mathcal{D}_0$  (e.g. see [3], [7]).

Problems (3.1), (3.2) are approximated by means of a particle method that can take into account Dirichlet data (3.3).

For each subdomain  $\mathcal{D}_i$ , the fluid motion is studied in a non-inertial frame of reference that is linked to  $S_i$ , and the Navier-Stokes equations are formulated in terms of stream function of the relative velocity and the vorticity of the absolute velocity. Hence, the PDEs to be solved are (4.1), (4.2). This system is complemented by the boundary conditions (4.3).

Furthermore, transmission conditions need to be enforced so that continuity of the physical variables along with their flux is ensured across  $\Gamma_i$ . The conditions in question depend on the local nature of the PDEs to which  $\psi_i$  and  $\omega_i$  are solutions. Since  $\psi_i$  is solution to an elliptic problem (4.2) whatever the flow nature, a transmission condition on  $\psi_i$  must be enforced everywhere on  $\Gamma_i$ . Such a condition is provided by (4.4). Note that the coupling condition (4.4) is global, *i.e.* it transmits the whole spectrum of information to each subdomain at once, whereas classical Dirichlet-Neumann coupling conditions (e.g. [3], [7]) poorly transmit low frequencies. By using the same arguments as above, transmission of information on  $\omega_i$  is achieved by (4.6). As far as information transfer is concerned, this condition is sufficient. Nevertheless, since (4.1) is approximated by means of a finite differences scheme, a boundary condition for  $\omega_i$  on  $\Gamma_i$  is required. Since the flow regime is almost hyperbolic, the piece of information that is missing on the subset of  $\Gamma_i$  where the flow goes out is obtained by doing an approximate Lagrangian integration of (4.1), that is (4.7).

The  $(\psi_i, \omega_i)$  problem as formulated above is linearized and solved by means of a finite differences method that has been developed in [2].

In Figure 2 we present streamline patterns about impulsively started tandem airfoils at times  $t=1.5, 2.5, 3.5$  and  $4.5$ . The leading airfoil oscillates in pitch and the rear one is fixed. Shown here is the interaction between the rear airfoil and the starting vortex that has been shed by the leading airfoil. The fluid domain is decomposed into three subdomains. The Reynolds number  $v_\infty C/2\nu$  is set to 3,000, the reduced frequency of the oscillating airfoil  $fC/2v_\infty$  is equal to 0.2 and  $\alpha_{\max}=45^\circ$ . The second example has been designed to illustrate versatility of the present method. In Figure 3 is shown shed particles and streamline patterns about a Darrieus-like wind turbine at  $t=2.2$  after an impulsive start. There are four subdomains. The wind turbine rotates counterclockwise and the fluid moves from right to left with velocity  $v_\infty$ . Denoting by  $R$  the wind turbine radius and by  $r$  the hub radius,  $\Omega R/v_\infty=2.16$  and  $v_\infty r/\nu=3,000$ .

1. INTRODUCTION. — L'observation expérimentale des écoulements externes incompressibles de fluides visqueux montre que dès que le nombre de Reynolds est suffisamment élevé, la vorticité tend à se concentrer dans les sillages, et la convection domine la diffusion visqueuse en dehors des couches limites. Ces conditions sont favorables à l'approximation numérique de tels écoulements par des méthodes particulières. Cette

classe de méthodes offre en plus l'avantage de s'affranchir de tout maillage, qualité éminemment intéressante pour étudier les systèmes de plusieurs corps en mouvement relatif. Certains problèmes d'interaction fluide-structure en grands déplacements entrent dans ce cadre. Toutefois, les méthodes particulières sont peu précises dès que les effets visqueux sont comparables, voire dominent les effets convectifs. Ainsi, au voisinage des parois solides, sièges de couches limites intenses, il faut faire appel à des méthodes eulériennes (e.g. différences finies, éléments finis). Les remarques ci-dessus ont conduit au développement d'une méthode de décomposition de domaines combinant les avantages des approches lagrangiennes et eulériennes (*cf.* [5], [8]).

2. POSITION DU PROBLÈME. — Considérons  $p$  corps solides  $(S_i)_{i=1, \dots, p}$  évoluant par rapport à un repère galiléen  $(O, i, j)$  de  $\mathbb{R}^2$ . On définit  $k=i \times j$ . Soit  $(v_i, \Omega_i)_{i=1, \dots, p}$  les éléments de réduction des torseurs des déplacements de chaque corps en  $(O_i)_{i=1, \dots, p}$ . Les corps sont plongés dans un fluide newtonien incompressible au repos à l'infini. Le domaine fluide, noté  $\mathcal{D}$ , est décomposé en  $p+1$  sous-domaines ouverts disjoints tels que  $\mathcal{D}=\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_i$  où les  $\mathcal{D}_i$  sont homéomorphes à des couronnes. Le découpage est

réalisé de telle sorte que l'écoulement dans  $\mathcal{D}_0$  soit dominé par la convection. On note  $B_i$  (resp.  $\Gamma_i$ ) l'interface entre  $\mathcal{D}_i$  et  $S_i$  (resp.  $\mathcal{D}_0$ ), et  $n_i$  la normale extérieure de  $\mathcal{D}_i$ .

Dans  $\mathcal{D}_0$  les équations de Navier-Stokes sont formulées en vitesse-tourbillon  $(u_0, \omega_0)$  et approchées par une méthode particulière, dans chaque  $\mathcal{D}_i$ , elles sont formulées en fonction de courant-tourbillon  $(\psi_i, \omega_i)$  et approchées par des différences finies. Soit  $T>0$  et  $N \in \mathbb{N}$ , on résout le problème dans l'intervalle de temps  $[0, T]$ . Soit  $\delta t=T/N$  et  $t_k=k \delta t$  pour  $0 \leq k \leq N$ . Supposons connues  $(u_0^l, \omega_0^l)$  et  $(\psi_i^l, \omega_i^l)$  des approximations de  $(u_0, \omega_0)$  et  $(\psi_i, \omega_i)$  sur les intervalles de temps  $(t_{l-1}, t_l)$  pour  $1 \leq l \leq k < N$ , on cherche en parallèle des approximations de  $(u_0, \omega_0)$  et  $(\psi_i, \omega_i)$  sur  $(t_k, t_{k+1})$ .

3. SOLUTION DANS  $\mathcal{D}_0$ . — Soit  $v_\infty(t)$  une vitesse d'ensemble des  $p$  solides (e.g. moyenne des  $v_i$ ). Le mouvement est étudié dans un repère entraîné par  $v_\infty(t)$ . Dans  $\mathcal{D}_0$  l'équation de convection diffusion de  $\omega_0$  est approchée par :

$$(3.1) \quad \partial \omega_0^{k+1} / \partial t + \nabla \cdot (\omega_0^{k+1} u_0^k) = \nu \nabla^2 \omega_0^{k+1},$$

$$(3.2) \quad u_0^k = -v_\infty + \int_{\mathcal{D}} \omega^k \nabla G \times k dy + \sum_{j=1}^p \int_{B_j} [(n_j \times v_{ej}) \times \nabla G + (n_j \cdot v_{ej}) \nabla G] dl,$$

où  $G$  est la fonction de Green du laplacien dans  $\mathbb{R}^2$  et  $v_{ej}=v_j + \Omega_j \times (y - O_j)$ .

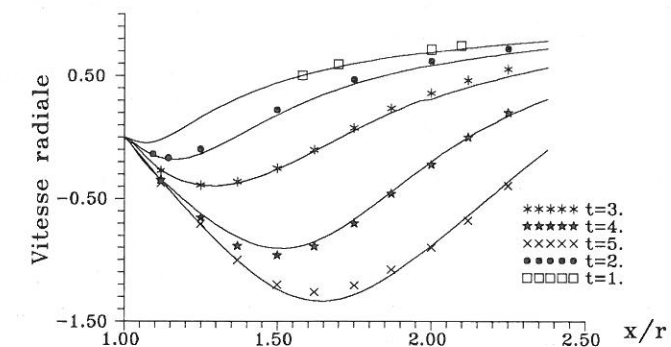


Fig. 1. — Comparaison entre le calcul numérique (lignes) et l'exp riece (symboles).

Fig. 1. — Comparison between numerical (solid lines) and experimental (symbols) velocity profiles.

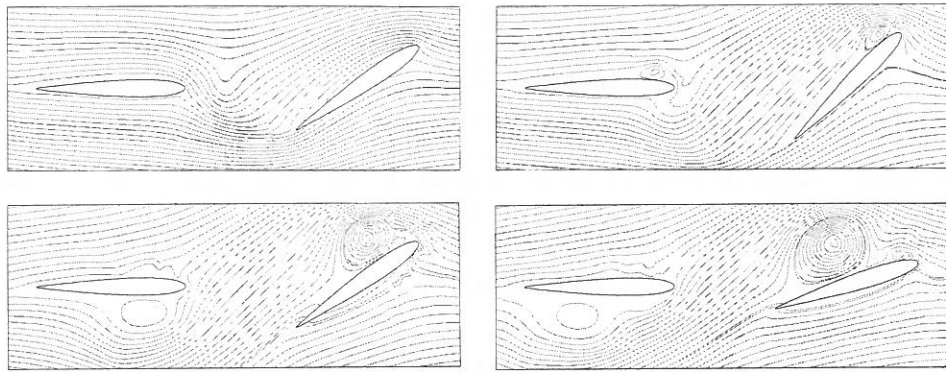


Fig. 2. — Lignes de courant absolues autour d'un profil oscillant en tandem avec un profil fixe.

Fig. 2. — Streamline patterns about impulsively started tandem airfoils.

Pour que le problème soit bien posé il faut imposer des conditions de transmission sur  $\omega_i$  au travers des interfaces  $\Gamma_i$ . On peut trouver ces conditions en réalisant la décomposition parabolique approchée de l'opérateur de convection diffusion comme en [1]. Une autre approche consiste à tenir compte du fait que la diffusion est dominée par la convection sur  $\Gamma_i$ , et (3.1) peut être considérée localement comme une équation hyperbolique dont le second membre  $v \nabla^2 \omega_0^{k+1}$  est une perturbation. Pour ce type de problème, des conditions de Dirichlet sont imposées sur la partie de  $\Gamma_i$  où la vitesse est entrante ([3], [7]). Dans ce cadre, la condition de transmission s'écrit :

$$(3.3) \quad j=1, \dots, p, \quad \omega_0^{k+1}(\mathbf{x}) = \omega_j^k(\mathbf{x}), \quad \text{si } \mathbf{u}_0^k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_0(\mathbf{x}) < 0$$

On approche enfin (3.1), (3.2) par une méthode particulière tenant compte de (3.3).

4. SOLUTION DANS  $\mathcal{D}_i$ . — Pour chaque sous domaine  $\mathcal{D}_i$  on se place dans le repère local du solide  $S_i$ , et on choisit comme inconnues la fonction de courant relative  $\psi_i$  et le tourbillon absolu  $\omega_i$ . Ainsi, le système à résoudre dans  $\mathcal{D}_i$  s'écrit :

$$(4.1) \quad \partial \omega_i^{k+1} / \partial t + \nabla \cdot (\omega_i^{k+1} \nabla \times (\psi_i^{k+1} \mathbf{k})) = v \nabla^2 \omega_i^{k+1}$$

$$(4.2) \quad \nabla^2 \psi_i^{k+1} = 2 \Omega_i - \omega_i^{k+1}$$

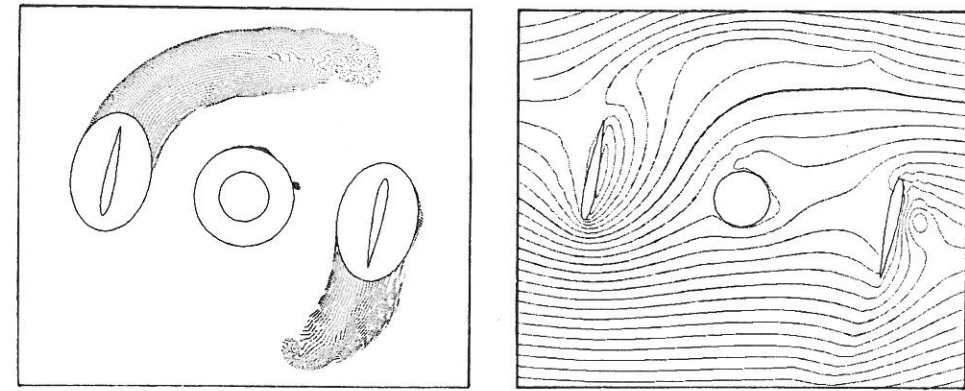
Noter que ce système a une forme identique à celle qu'il aurait s'il était écrit dans le repère absolu. Cette invariance par rapport au repère est caractéristique des formulations des équations de Navier-Stokes basées sur le tourbillon de la vitesse.

Le système est complété par les conditions aux limites sur la surface  $B_i$  du solide :

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_i^{k+1} = \psi_{B_i}^{k+1}, \\ \frac{\partial \psi_i^{k+1}}{\partial n} = 0, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \int_{B_i} \frac{\partial \omega_i^{k+1}}{\partial n_i} dl = \frac{\Omega_i}{v} \int_{B_i} [\mathbf{k} \times (\mathbf{y} - \mathbf{O}_i)] \cdot d\mathbf{l}$$

Il faut de plus imposer des conditions de transmission sur l'interface  $\Gamma_i$  afin d'assurer la continuité des grandeurs physiques et de leurs flux. Ces conditions dépendent de la nature locale des équations qui gouvernent  $\psi_i$  et  $\omega_i$ .

La fonction  $\psi_i$  est solution d'un problème elliptique quelle que soit la nature de l'écoulement. En conséquence on doit imposer une condition de transmission pour  $\psi_i$

Fig. 3. — Particules émises et lignes de courant absolues pour une éolienne Darrieux à  $t=2$ .Fig. 3. — Shed particles and streamline patterns about a Darrieux wind turbine at  $t=2$ .

sur toute l'interface  $\Gamma_i$ . Une telle condition est fournie par une identité de Green:

$$(4.4) \quad \psi_i^{k+1}(\mathbf{x}) = -\psi_{ei}(\mathbf{x}) - \int_{\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_j} \omega^k G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dy + \sum_{j=1}^p \int_{B_j} (\psi_{ej} + \psi_{B_j}^{k+1}) \frac{\partial G(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{\partial n_j} dl - \int_{B_j} G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial \psi_{ej}}{\partial n_j} dl,$$

où  $\psi_{ej}$  désigne la fonction de courant de la vitesse d'entraînement du solide  $S_j$  :

$$(4.5) \quad \psi_{ej}(\mathbf{x}) = v_j(\mathbf{x}) \cdot [(\mathbf{x} - \mathbf{O}_j) \times \mathbf{k}] - \Omega_j |\mathbf{x} - \mathbf{O}_j|^2 / 2.$$

Noter que (4.4) réalise le couplage global de  $\mathcal{D}_i$  avec tous les autres sous domaines. Contrairement à l'approche Dirichlet-Neumann classique (e. g. [3], [7]), tout le spectre de l'information est ainsi communiqué à chaque sous-domaine. En contrepartie, cette approche nécessite le calcul d'une intégrale de volume qui peut être coûteuse. L'intégrale est actuellement évaluée à l'aide d'une méthode particulière classique. A l'avenir, cette intégrale doit être calculée à l'aide d'une méthode particulière multigrille adaptative [6].

En utilisant les mêmes arguments qu'en paragraphe 3, la transmission d'information pour le tourbillon est réalisée sur la partie de  $\Gamma_i$  où la vitesse est entrante par :

$$(4.6) \quad \omega_i^{k+1}(\mathbf{x}) = \omega_0^k(\mathbf{x}), \quad \text{si } \mathbf{u}_i^k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_i(\mathbf{x}) < 0.$$

Formellement cette condition est suffisante pour assurer le transfert d'information. Néanmoins, (4.1) étant approchée par un schéma aux différences finies adapté aux problèmes paraboliques, une condition limite pour  $\omega_i$  sur  $\Gamma_i$  tout entier est requise. Puisque le régime est quasi-hyperbolique, l'information manquante pour  $\omega_i$  est obtenue sur la partie de  $\Gamma_i$  où la vitesse est sortante en faisant une intégration lagrangienne de (4.1) :

$$(4.7) \quad \omega_i^{k+1}(\mathbf{x}) = \omega_i^k(\mathbf{x} - \mathbf{u}_i^k \delta t) + v \delta t \nabla^2 \omega_i(\mathbf{x} - \mathbf{u}_i^k \delta t), \quad \text{si } \mathbf{u}_i^k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_i(\mathbf{x}) \geq 0.$$

Le problème  $(\psi_i, \omega_i)$  ainsi formulé est résolu dans  $\mathcal{D}_i$  par une technique de différences finies développée dans [2].

5. EXEMPLES NUMÉRIQUES. — Dans un premier temps on considère un cylindre de rayon  $r$  démarré impulsivement. Sur la figure 1 on compare à différents instants après le démarrage le profil de vitesse expérimental [4] en aval du cylindre sur l'axe de symétrie

avec le profil obtenu par la présente méthode. Le domaine  $\mathcal{D}_1$  est une couronne de rayon extérieur  $2r$  et  $v_\infty r/\nu = 3\,000$ .

Sur la figure 2 on présente les lignes de courant absolues autour d'un profil oscillant en tandem avec un profil fixe. On montre ici l'interaction du second profil avec le tourbillon de démarrage du premier aux temps :  $t = 1,5, 2,5, 3,5$  et  $4,5$ ;  $v_\infty C/2\nu = 3\,000$ ,  $fC/2v_\infty = 0,2$  et  $\alpha_{\max} = 45^\circ$ . Noter que le tourbillon est coupé en deux à  $t = 2$ . Le morceau de tourbillon qui passe par l'extrados est absorbé alors que celui qui passe par l'intrados est amplifié et provoque un décollement de la couche limite.

Sur la figure 3 on représente les lignes de courant absolues pour une éolienne Darrieus à  $t = 2,2$  après un démarrage impulsif;  $\Omega R/v_\infty = 2,16$  et  $v_\infty r/\nu = 3\,000$ . A la rotation d'ensemble s'ajoute un écoulement uniforme venant de la gauche.

Note remise le 25 novembre 1991, acceptée le 24 janvier 1992.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Ph. CHARTON, F. NATAF et F. ROGIER, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 313, série I, 1991, p. 623-626.
- [2] O. DAUBE et T. P. LOC, *Journal de Mécanique*, 17, n° 5, 1978, p. 651-678.
- [3] P. LE TALLEC, A direct introduction of some domain decomposition techniques for advection diffusion problems, *École d'été d'Analyse Numérique C.E.A.-E.D.F.-I.N.R.I.A.*, Bréau-sans-Nappe, 1991.
- [4] T. P. LOC et R. BROUARD, *J. Fluid Mech.*, 160, 1985, p. 93-117.
- [5] J.-L. GUERMOND, S. HUBERSON et W. Z. SHEN, *Simulation des écoulements visqueux externes bidimensionnels par une méthode de décomposition de domaines*, rapport interne L.I.M.S.I. 91-9, Août 1991.
- [6] L. GREENGARD et V. ROKHLIN, *J. Comput. Phys.*, 73, 1987, p. 325-348.
- [7] A. QUARTERONI, *Domain decomposition methods for numerical solution of partial differential equations*, University of Minnesota Supercomputer Institute research report U.M.S.I. 90/246, 1990.
- [8] W. Z. SHEN, Calcul d'écoulements tourbillonnaires visqueux incompressibles par une méthode de couplage, *Thèse de doctorat*, Université Paris-XI (à paraître).