2294

Analyse numérique/*Numerical Analysis*

Sur l'approximation des équations de Navier-Stokes par une méthode de projection

Jean-Luc GUERMOND

Résumé – On formule la méthode de projection dans trois cadres variationnels discrets différents. On donne des estimations de convergence en temps inconditionnelles d'ordre un et conditionnelles d'ordre deux

Some implementations and error estimates for projection methods

Abstract – *After reformulating the projection method in three variational frameworks, one proves unconditional error estimates of order one and conditional error estimates of order two.*

Abridged English Version (Equation numbers refer to the French version). – This Note is concerned with the implementation of spatially discrete versions of Chorin-Temam's projection methods ([2], [6]). The emphasis is put on the projection step, which enforces incompressibility. Three types of variational approximations are proposed. Unconditional error estimates of order one and conditional error estimates of order two are given.

Let X and M be respectively stable and convergent internal approximations of $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ and $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ (of finite dimension). Let $A_X : X \to X'$ be so that $(A_X\, x,\, w) = (\nabla v,\, \nabla w)$ and $B_X : X \to M \equiv M'$ be so that $(B_X\, v,\, q) = (-\text{div}\, v,\, q)$. Consider the time-dependent and spatially discrete Stokes problem (2.1). It is well known that the solution of this problem, $(u(t),\, p(t))$, converges (in the appropriate sense) to the solution of the continuous Stokes problem. We are hereafter interested in building time approximation of (2.1) by means of fractional step techniques.

If B_X is onto, one possible scheme consists in approximating the provisional and the end-of-step velocity in the same vector space X. In this framework, the prediction (or viscous) step consists in looking for $\tilde{u}_{k+1} \in X$ satisfying problem (2.2), and the correction (or projection) step consists in looking for u_{k+1} in X and $p_{k+1} - p_k$ in M satisfying (2.3). Note that problem (2.3) is well-posed thanks to the surjectivity of B_X. This algorithm is stable and convergent (*see* below and [4]). However this approach is not quite natural, for the end-of-step velocity u_{k+1}, being approximated in X, satisfies $u_{k+1|\partial\Omega} = 0$, whereas its continuous counterpart satisfies only $u_{k+1} \cdot n\,|_{\partial\Omega} = 0$. For regular finite element approximations, approximating u_{k+1} in X is optimal for it yields a bound from above on the condition number of the pressure operator $B_X\, B_X^t$ which is optimal [*see* (2.4)]. This conclusion is no longer true for spectral approximations, since for such approximations the stability constant β_X of B_X^t generally converges to zero as the polynomial degree of the approximations increases.

In order to avoid this difficulty, it is necessary to introduce Y a stable and convergent internal approximation of $\mathbf{H}_0^{\text{div}}(\Omega) = \{v \in \mathbf{L}^2(\Omega),\ \text{div}\, v \in L^2(\Omega),\ v \cdot n\,|_{\partial\Omega} = 0\}$. Assume also that $X \subset Y$ and define the $\mathbf{L}^2(\Omega)$ orthogonal projection $\pi : Y' \to X'$. Likewise, define B_Y as the extension of B_X so that $\pi\, B_Y^t = B_X^t$. Assume that this extension is onto. In these conditions, the diffusion step is (2.5), where u_k must be projected onto X' for it does not belong to X. The projection step is (2.6); this problem is well-posed, thanks to the surjectivity of B_Y. In this framework it is possible to build spectral approximations so that B_Y is onto and the condition number of $B_Y\, B_Y^t$ is optimal [1]. Note however that this technique is somewhat less cost-effective than the previous one for it requires two approximation spaces for the velocities.

Note présentée par Roland GLOWINSKI.

0764-4442/94/03190887 $ 2.00

This algorithm has the same stability and convergence properties as the former. However, if B_X^t is not into (*i.e.* has spurious modes), it can be shown that the global stability in time on the pressure is ensured only on the component of the pressure that is orthogonal to the possible spurious modes of B_X^t [after all, it is not surprising since uniqueness of the pressure that is solution to (2.1) is ensured only in $N(B_X^t)^{\perp}$].

The two methods presented above share the same drawback when it comes to implement them on computers. Indeed, once bases of X (or Y) and M are chosen, the projection step (2.3) or (2.6) reduces to solving the linear system (2.7), which involves the inverse of the mass matrix I_h. If this matrix is not diagonal, which is the case for finite elements, the projection step may becomes a not so easy problem to solve contrary to what we assumed. This difficulty leads to consider a third algorithm based on the representation of the projection step as a Poisson equation supplemented with a Neumann boundary condition.

For this purpose, introduce Z a stable, convergent, and internal approximation of $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ (of finite dimension). Let $A_Z : Z \to Z'$ be so that $(A_Z\, p, q) = (\nabla p, \nabla q)$. Set $M = Z$ in terms of vector space and equip M with the norm of $L^2(\Omega)$ [*i.e.* in some sense M may be viewed as the completion of Z in $L^2(\Omega)$]. Introduce also the orthogonal projection $\pi : \mathbf{L}^2(\Omega) \to X'$. In this functional framework, the diffusion step is put in the form (2.8), where u_k must be projected onto X'. The pressure is corrected by solving (2.9) and the corrected velocity is given by (2.10). This velocity is not strictly divergence free, but it can be shown that its divergence tends (in some weak sense) to zero as the mesh is refined. This algorithm has the same stability and convergence properties as the two others, but it is far easier to implement. Note that, like the second algorithm, this algorithm does not require B_X^t to be onto; likewise, the global stability in time on the pressure is ensured on the component that is orthogonal to the possible spurious modes of B_X^t.

---

1. Introduction. – Dans cette Note on s'intéresse aux propriétés d'approximation temporelle des méthodes de projection du type Chorin-Temam ([2], [6]) dans un cadre variationnel discret. L'idée de base de la méthode de projection (et ses extensions [3], [7]) consiste à décomposer chaque étape de la marche en temps en sous-pas intermédiaires pour découpler les effets de la diffusion visqueuse de ceux de l'incompressibilité, la conséquence étant qu'à chaque pas de temps une équation de Stokes généralisée, difficile à résoudre en pratique, est remplacée par une séquence de deux sous-problèmes *a priori* plus simples. Bien que l'idée soit simple en principe, l'implémentation pratique de l'étape incompressible dans le cadre d'une approximation spatiale ne semble pas claire et certaines questions sur l'ordre de convergence en temps de la méthode ne sont pas clairement résolues ([4], [5]). On propose dans cette Note quelques réponses à ces questions.

2. Trois approximations variationnelles. – Soient X et M respectivement des approximations internes, convergentes et stables de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ (de dimensions finies). Soient $A_X : X \to X'$ tel que $(A_X\, v, w) = (\nabla v, \nabla w)$ et $B_X : X \to M \equiv M'$ tel que $(B_X\, v, q) = (-\operatorname{div} v, q)$. B_X n'est pas systématiquement supposé surjectif par la suite. Considérons le problème suivant : pour $f \in L^2(0, T, X')$ et $v_0 \in \ker(B_X)$, trouver $u \in L^2(0, T; X)$ et $p \in L^2(0, T; M)$ tels que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A_X\, u + B_X^t\, p = f \\ B_X\, u = 0 \\ u\,|_{t=0} = v_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Ce problème correspond à l'approximation spatiale du problème de Stokes instationnaire. On admet la convergence de la solution $(u(t), p(t))$ de (2.1) vers la solution du problème continu. Par la suite on s'intéresse uniquement à l'approximation temporelle de (2.1) par une technique de pas fractionnaires du type Chorin-Temam.

Si B_X est surjectif, un premier schéma consiste à approcher les vitesses prédites et corrigées dans le même espace X. L'étape de prédiction (diffusion) s'écrit : trouver $\tilde{u}_{k+1} \in X$ tel que

$$\frac{\tilde{u}_{k+1} - u_k}{\delta t} + A_X\, \tilde{u}_{k+1} = f_{k+1} - B_X^t\, p_k. \tag{2.2}$$

L'étape de correction (projection) s'écrit : trouver u_{k+1} dans X et $p_{k+1} - p_k$ dans M tels que

$$\begin{cases} \dfrac{u_{k+1} - \tilde{u}_{k+1}}{\delta t} + B_X^t\,(p_{k+1} - p_k) = 0 \\ B_X\, u_{k+1} = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

B_X étant surjectif, ce problème est bien posé. L'algorithme ainsi construit est stable et convergent (*cf.* ci-après et [4]). Toutefois, cette façon de faire peut paraître surprenante car u_{k+1} satisfait $u_{k+1|\partial\Omega} = 0$ et les vitesses tests de l'étape de projection satisfont $v_{h|\partial\Omega} = 0$, alors qu'il pourrait sembler plus naturel d'imposer $u_{k+1} \cdot n\,|_{\partial\Omega} = 0$ et $v_h \cdot n\,|_{\partial\Omega} = 0$ comme dans l'étape de projection continue. Ce choix a des conséquences sur le conditionnement de l'opérateur de pression $B_X\, B_X^t$.

Proposition 2.1. – *Dans le cadre d'une approximation par des éléments finis sur une triangulation régulière de finesse h, le conditionnement de l'opérateur de pression satisfait la majoration*

$$\kappa\,(B_X\, B_X^t) \leqq \frac{c}{\beta_X^2\, h^2}, \tag{2.4}$$

où β_X est la constante de stabilité de B_X^t (i.e. *la constante « inf-sup »*).

Cette majoration montre que l'opérateur de pression est optimal en terme de conditionnement. En effet, le problème continu sous-jacent est une équation de Poisson avec une condition de Neumann homogène dont l'opérateur discret associé à un conditionnement en $1/h^2$. Ainsi le premier algorithme est adapté aux approximations par éléments finis. Cette conclusion n'est plus correcte pour des approximations spectrales. La constante de stabilité de B_X^t dans ce cadre tend vers zéro avec l'inverse du degré polynomial de l'approximation. Il en résulte un conditionnement non optimal de l'opérateur $B_X\, B_X^t$.

Pour contourner cette difficulté il faut introduire un espace d'approximation admettant des vitesses tests satisfaisant uniquement $v \cdot n\,|_{\partial\Omega} = 0$. On introduit donc Y une approximation interne stable et convergente de $\mathbf{H}_0^{\mathrm{div}}(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega),\ \operatorname{div} v \in L^2(\Omega),\ v \cdot n\,|_{\partial\Omega} = 0\}$. On suppose que $X \subset Y$, et on définit la projection orthogonale (au sens de la dualité induite par $\mathbf{L}^2(\Omega)$) $\pi : Y' \to X'$. De même on définit B_Y l'extension de B_X telle que $\pi\, B_Y^t = B_X^t$. On suppose que cette extension est surjective. Dans ce contexte l'étape de diffusion s'écrit : chercher $\tilde{u}_k \in X$ tel que

$$\frac{\tilde{u}_{k+1} - \pi\, u_k}{\delta t} + A_X\, \tilde{u}_{k+1} = f_{k+1} - B_X^t\, p_k. \tag{2.5}$$

Noter que cette fois-ci u_k doit être projeté dans X' puisque cette vitesse n'appartient plus naturellement à X. L'étape de projection s'écrit : chercher $u_k \in Y$ et $(p_{k+1} - p_k) \in M$

tels que

$$(2.6)\qquad \begin{cases} \dfrac{u_{k+1} - \tilde{u}_{k+1}}{\delta t} + B_Y^t\,(p_{k+1} - p_k) = 0 \\ B_Y\,u_{k+1} = 0. \end{cases}$$

Ce problème est bien posé grâce à la surjectivité de B_Y. Dans ce contexte il est possible de construire des approximations spectrales dont le conditionnement de $B_Y\,B_Y^t$ est optimal [1]. Cette approche est moins économique que la précédente car il faut construire deux opérateurs B_X et B_Y à la place d'un seul pour la première méthode. Cet algorithme a les mêmes propriétés de stabilité et de convergence que le précédent. Noter que ce schéma n'impose pas explicitement que B_X soit surjectif (*i.e.* B_X^t injectif et stable); en effet, l'étape de diffusion repose sur la X-ellipticité de A_X et l'étape de projection repose sur la surjectivité de B_Y. Cependant, si B_X^t n'est pas injectif (*i.e.* admet des modes parasites), on montre que la stabilité globale en temps n'est acquise que pour la pression débarrassée des modes parasites éventuels de B_X^t (ce qui est naturel, puisqu'on a unicité de la pression solution de (2.1) modulo les modes parasites éventuels de B_X^t).

Les deux méthodes ci-dessus ont un inconvénient commun lorsqu'il s'agit de les mettre en œuvre. Ayant choisi une base de X ou Y et une base de M, en notant B_h la matrice associée à l'opérateur B_X ou B_Y, l'étape de projection est équivalente à résoudre le problème matriciel suivant

$$(2.7)\qquad B_h\,I_h^{-1}\,B_h^t\,(P_{k+1} - P_k) = \frac{B_h\,\tilde{U}_{k+1}}{\delta t}.$$

On voit ainsi que les deux approches présentées ci-dessus nécessitent l'inversion de la matrice de masse I_h. Si cette matrice n'est pas diagonale, ce qui est le cas pour des éléments finis, l'étape de projection peut devenir un problème non trivial contrairement à ce qu'on aurait pu imaginer. Cette difficulté conduit à considérer un troisième type d'algorithme basé sur la représentation de l'étape de projection en problème de Poisson avec condition de Neumann.

Dans cette perspective on introduit Z une approximation interne stable et convergente de $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ (de dimension finie). On définit $A_Z : Z \to Z'$ tel que $(A_Z\,p,\,q) = (\nabla p,\,\nabla q)$. On pose $M = Z$ comme espace vectoriel et on munit M de la norme de $L^2(\Omega)$ [*i.e.* c'est le complété de Z dans $L^2(\Omega)$]. On introduit aussi la projection orthogonale $\pi : L^2(\Omega) \to X'$. Dans ce contexte l'étape de diffusion se met sous la forme: chercher $\tilde{u}_{k+1}$ dans X tel que

$$(2.8)\qquad \frac{\tilde{u}_{k+1} - \pi\,u_k}{\delta t} + A_X\,\tilde{u}_{k+1} = f_{k+1} - B_X^t\,p_k.$$

On notera que u_k doit être projeté dans X'. Ensuite on cherche $(p_{k+1} - p_k) \in Z$ tel que

$$(2.9)\qquad A_Z\,(p_{k+1} - p_k) = \frac{B_X\,\tilde{u}_{k+1}}{\delta t}.$$

Ce problème est bien posé grâce à la Z-ellipticité de A_Z. Enfin, on calcule la vitesse projetée

$$(2.10)\qquad u_{k+1} = \tilde{u}_{k+1} - \delta t\,\nabla\,(p_{k+1} - p_k).$$

où l'équation est à prendre dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Cette vitesse n'est pas strictement solénoïdale, mais sa divergence tend vers zéro (dans un sens faible) lorsqu'on raffine le maillage. Ce troisième algorithme a les mêmes propriétés de stabilité et de convergence que les deux autres, mais il est plus simple à mettre en œuvre. Comme pour le second algorithme, on montre la stabilité sur la pression débarrassée des modes parasites éventuels de B_X^t.

3. Estimations de convergence. – Définissons, pour les trois algorithmes ci-dessus, les erreurs: $e_k = u(t^k) - u_k$, $\tilde{e}_k = u(t^k) - \tilde{u}_k$ et $\delta_k = p(t^k) - p_k$, où $(u(t),\,p(t))$ est la solution du problème discret en espace (2.1). On pose $L = X$ (en terme d'espace vectoriel) qu'on munit de la norme de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ (*i.e.* l'espace pivot), et on introduit $M^1 = M$ (en terme d'espace vectoriel) qu'on munit de la norme du graphe de l'un des trois gradients discrets ci-dessus (*i.e.* B_X^t, B_Y^t, ou $\pi\,\nabla$). Dans les trois cas on a

Théorème 3.1. – *Si la solution de* (2.1) *est telle que* $u_{tt} \in L^2(0,\,T;\,L)$ *et* $p_t \in L^2(0,\,T;\,M^1)$ *et si* $|\,e_0\,|_L \leqq c\,\delta\,t$ *et* $|\,\delta_0\,|_{M_1} \leqq c$ *on a alors l'estimation d'erreur:*

$$(3.1)\qquad \sup_{0\leqq k\leqq K}\,[|\,e_k\,|_L^2 + \delta t^2\,|\,\delta_k\,|_{M^1}^2] + 2\,\alpha\,\delta\,t\,\sum_{l=1}^{K}\,|\,\tilde{e}_l\,|_X^2 \leqq c\,\delta t^2.$$

Remarque 1. – Ce résultat établi dans [5] pour le problème de Stokes continu en espace n'était pas encore établi dans un cadre général comprenant le cadre discret.

Remarque 2. – L'estimation (3.1) ne donne pas de résultat fort pour l'erreur sur la pression en norme du gradient. Pour établir une estimation sur cette erreur en norme $l^2(t^0,\,\ldots,\,t^K;\,M)$ on soustrait (étape de diffusion)$+\pi$ (étape de projection) de (2.1) pour obtenir:

$$(3.2)\qquad B_X^t\,\delta_{k+1} = R_k - \frac{\pi\,e_{k+1} - \pi\,e_k}{\delta t} - A_X\,\tilde{e}_{k+1}$$

où R_k est le reste intégral de Taylor. Puisque (3.1) donne une estimation de $A_X\,\tilde{e}_{k+1}$ dans $l^2(t^0,\,\ldots,\,t^K;\,X')$ et que R_k est facilement majoré, on obtient une estimation sur la pression en majorant le terme $(e_{k+1} - e_k)/\delta t$ dans $l^\infty(t^0,\,\ldots,\,t^K;\,L)$. La majoration souhaitée est donnée par

Corollaire 3.1. – *Si la solution de* (2.1) *est telle que* $u_{ttt} \in L^2(0,\,T;\,L)$ *et* $p_{tt} \in L^2(0,\,T;\,M^1)$ *et si les conditions initiales vérifient* $|\,e_0\,|_L \leqq c\,\delta t^2$ *et* $|\,\delta_0\,|_{M_1} \leqq c\,\delta t$, *alors:*

$$(3.3)\qquad \sup_{0\leqq k\leqq K-1}\,[|\,e_{k+1} - e_k\,|_L^2 + \delta t^2\,|\,\delta_{k+1} - \delta_k\,|_{M^1}^2] + 2\,\alpha\,\delta\,t\,\sum_{l=1}^{K-1}\,|\,\tilde{e}_{l+1} - \tilde{e}_l\,|_X^2 \leqq c\,\delta t^4.$$

Pour montrer ce résultat on soustrait deux étapes successives de diffusion et de projection et on se ramène ainsi exactement dans le cadre du théorème 3.1. Dans l'éventualité où B_X ne serait pas surjectif, posons $\hat{M} = \ker(B_X^t)^\perp$, définissons $\hat{\pi} : M \to \hat{M}$ la projection orthogonale correspondante, et notons $\hat{\beta}_X$ la constante de stabilité de $B_X^t\,\hat{\pi}$. On déduit alors

Théorème 3.2. – *Sous les hypothèses du corollaire* 3.1 *on a l'estimation en pression:*

$$(3.4)\qquad \left[\delta t\,\sum_{0}^{K}\,|\,\hat{\pi}\,\delta_k\,|_M^2\right]^{1/2} \leqq \frac{c}{\hat{\beta}_X}\,\delta t.$$

Cette estimation résulte de (3.2), (3.1), (3.3) et de la stabilité de $B_X^t\,\hat{\pi}$. L'estimation (3.3), déterminante ici, traduit simplement le fait que $(u_{k+1} - u_k)/\delta t$ est une approximation d'ordre un de $du(t^{k+1})/dt$. Noter que cette estimation demande de la régularité sur u_{ttt} et p_{tt} alors que l'estimation de la vitesse demande de la régularité sur u_{tt} et p_t. L'estimation (3.4) était donnée dans [5] pour le problème de Stokes continu en espace mais n'était pas correctement démontrée [4].

4. Les ordres supérieurs. – Afin d'améliorer l'ordre de convergence global, Van Kan [7] propose d'utiliser un schéma de Crank-Nicolson pour l'étape de diffusion :

$$\frac{\tilde{u}_{k+1} - \pi\, u_k}{\delta t} + \frac{1}{2} A_X (\tilde{u}_{k+1} + \tilde{u}_k) = f_{k+1/2} - B_X^t\, p_{k-1/2}. \tag{4.1}$$

On montre comme précédemment que l'algorithme ainsi modifié est inconditionnellement d'ordre un, mais en supposant $A_X \in \mathcal{L}(L, L)$, ce qui est vrai dans le cadre discret, on a

Théorème 4.3. – *Soit* $Q = \sup_{v \in L} |A_X v|_L / |v|_L$. *Si* u_{ttt} *et* $A_X u_{tt}$ *sont dans* $L^2(0, T; L)$, $p_{tt} \in L^2(0, T; M^1)$ *et* $\max(|e_0|_L, \delta t^{1/2} |\tilde{e}_0|_X, \delta t |\delta_{-1/2}|_{M^1}) \leqq c\,\delta t^2$ *et si* $\delta t \leqq 1/2\,Q$, *alors*

$$\sup_{0 \leqq t^k \leqq T} [|e_k|_L + |\tilde{e}_k|_X] + \delta t \sum_{l=1}^{K} |\delta_{l-1/2}|_M^2]^{1/2} \leqq c(Q)\,\delta t^2. \tag{4.2}$$

On a, bien sûr, des résultats équivalents avec un schéma d'Euler rétrograde d'ordre deux.

$$\frac{3\,\tilde{u}_{k+1} - \tilde{u}_k - 3\,\pi\, u_k + \pi\, u_{k+1}}{2\,\delta t} + A_X\, \tilde{u}_{k+1} = f_{k+1} - B_X^t\, p_k. \tag{4.3}$$

En pratique on observe bien l'ordre 2 (sans la contrainte $\delta t \leqq 1/2\,Q$) si on résout les étapes de diffusion et de projection exactement. Toutefois si on ne résout pas ces problèmes exactement [*i.e.* en se contentant d'une résolution itérative avec une tolérance de l'ordre de l'erreur de consistance : $\min(\delta t^2, 1/Q)$], certaines expériences numériques montrent que l'ordre 2 peut être déstabilisé au profit de l'ordre 1, [4]. Ces expériences numériques suggèrent que l'ordre 2 est conditionnellement stable par rapport à de petites perturbations. Ceci suggère aussi que l'ordre 1 serait l'ordre inconditionnel maximal pour ce type d'algorithme et non pas les ordres 3/2 ou 2 comme avancé par certains auteurs.

L'auteur tient à remercier C. Bernardi, V. Girault et P. Le Quéré pour l'aide apportée au cours de ce travail.

Note remise le 1er juillet 1994, acceptée le 26 juillet 1994.

Références bibliographiques

[1] M. Azaiez, C. Bernardi et M. Grundmann, *Méthodes spectrales pour les équations du milieu poreux*, R 93029, Laboratoire d'Analyse Numérique, Paris-VI, 1993.

[2] A. Chorin, Numerical simulation of the Navier-Stokes equations, *Math. Comp.*, 22, 1968, p. 745-762.

[3] K. Goda, A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two- or three-dimensional cavity flows, *J. Comput. Phys.*, 30, 1979, p. 76-95.

[4] J.-L. Guermond, Remarques sur les méthodes de projection pour l'approximation des équations de Navier-Stokes, *Numer. Math.*, 67, 1994, p. 465-473; et Rapports LIMSI 93-30 et 94-03.

[5] J. Shen, On Error Estimates of Projection Methods for Navier-Stokes Equation: First-Order Schemes, *SIAM J. Numer. Anal.*, 29, 1, 1992, p. 57-77.

[6] R. Temam, Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes, *Bull. Soc. Math. France*, 98, 1968, p. 115-152.

[7] J. Van Kan, A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7, 3, 1986, p. 870-891.

LIMSI-CNRS, BP n° 133, *91403 Orsay Cedex, France.*