

Problèmes mathématiques de la mécanique / *Mathematical Problems in Mechanics*

Sur l'homogénéisation des équations de Navier-Stokes à faible nombre de Reynolds

Mouaouia FIRDAOUSS et Jean-Luc GUERMOND

Résumé – On montre que dans les milieux poreux périodiques dont les inclusions sont de taille équivalente à la période, la correction non linéaire à la loi de Darcy est quadratique en fonction du nombre de Reynolds, donc cubique en fonction de la vitesse de filtration.

Homogenization of the Navier-Stokes equations at low Reynolds number

Abstract – It is shown in this Note that for periodic porous media the period of which is of the same order as that of the inclusion, the non-linear correction to the Darcy law is quadratic in terms of the Reynolds number, i.e. cubic with respect to the seepage velocity.

Abridged English Version (Equation numbers refer to the French version) – This Note gives a proof of a conjecture by Wodié-Levy [6] and Mei-Auriault [3]: for periodic porous media the period of which is of the same order as that of the solid inclusions, the non-linear correction to the Darcy law is quadratic in terms of the Reynolds number. In some sense, this results contradicts Forchheimer's law. This result is illustrated by numerical test.

Consider Ω a parallelepipedic periodic cell in \mathbb{R}^n the sides of which are the vectors (t_1, \dots, t_n) assumed to be independent. For $i = 1, \dots, n$ we denote by $\partial\Omega_i^\pm$ the faces of Ω so that $\partial\Omega_i^+ = \partial\Omega_i^- + t_i$. Let Ω_0 be an open connected subdomain of Ω the boundary of which is smooth. For $i = 1, \dots, n$ we set $\partial\Omega_{i,p}^\pm = \partial\Omega_i^\pm \cap \partial\Omega_0$ and we assume that Ω_0 is compatible with the periodicity in the sense that $\partial\Omega_{i,p}^+ = \partial\Omega_{i,p}^- + t_i$. We also define

$\partial\Omega_{0,s} = \partial\Omega_0 \setminus \bigcup_{i=1}^n \partial\Omega_{i,p}^\pm$. We assume that $\text{mes}(\partial\Omega_{0,s}) \neq 0$ and $\text{mes}(\partial\Omega_{i,p}^-) \neq 0$ for

$i = 1, \dots, n$. We introduce now the usual functional framework: $H_{0,p}^1(\Omega_0) = \{v \in H^1(\Omega_0), v|_{\partial\Omega_{0,s}} = 0, v|_{\partial\Omega_{i,p}^-} = v|_{\partial\Omega_{i,p}^+}\}$ and $V = \{v \in H_{0,p}^1(\Omega_0), \text{div } v = 0\}$.

For $\lambda \in S_n(0, 1)$ (the unit sphere in \mathbb{R}^n , i.e. the scale of the pressure gradient is given), we define $u_0(\lambda) \in V$ as the solution to the Stokes problem (2.1). Thanks to the hypotheses, this problem is well posed and enables us to introduce the permeability tensor $K_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

so that $K_0 \lambda = \int_{\Omega_0} u_0(\lambda)$. This tensor is symmetric positive definite. In the framework of

the homogenization theory the relation $K_0 \lambda = \int_{\Omega_0} u_0(\lambda)$ is interpreted as the Darcy law (cf. Bensoussan-Lions-Papanicolaou [1], Sanchez-Palencia [4] and Tartar [5]). This Notes gives a bound on the non linear correction to the Darcy law for low Reynolds numbers.

Assume now that the dimension is $n = 2$ or 3 , and introduce the skew-symmetric trilinear form $b(u, v, w) = (u \cdot \nabla v, w)$; this form is continuous on $H_{0,p}^1(\Omega_0)^3$. Let c_b be the norm of this form on $H_{0,p}^1(\Omega_0)^3$. We are now interested in solving the following Navier-Stokes problem: for $\varepsilon \geq 0$ and $\lambda \in S_n(0, 1)$ find $u_\varepsilon(\lambda) \in V$ so that (2.3) holds. This problem is well posed thanks to the Poincaré inequality and a general existence theorem based on Brouwer's fixed point theorem (e.g. cf. th. 1.3, p. 282, Girault-Raviart [2]). The solution is unique if ε is small enough.

Note présentée par Évariste Sanchez-Palencia.

We now characterize the relation between $\int_{\Omega_0} u_\varepsilon(\lambda)$ and λ when ε is small. For this purpose we look for an expansion of the u_ε as follows $u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots$. More precisely, we define $u_0(\lambda) \in V$ and $u_1(\lambda) \in V$ so that (3.1) and (3.2) hold. It is clear that ε induces a regular perturbation, and we can prove the bounds (3.3); that is, $u_0(\lambda) + \varepsilon u_1(\lambda)$ is a good approximation of $u_\varepsilon(\lambda)$ in $H_{0,p}^1(\Omega_0)$. We now introduce the main hypothesis of this work:

(H) Assume that for all $\lambda \in S_n(0, 1)$ and every ε small enough, $u_\varepsilon(\lambda)$ satisfies:

$$\int_{\Omega_0} u_\varepsilon(\lambda) = - \int_{\Omega_0} u_\varepsilon(-\lambda) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Remark 1. – This hypothesis means that if the pressure gradient is reversed, the seepage velocity should also be reversed with no change in modulus. The result of the experiment may depend on the direction (not oriented) of the pressure gradient. This hypothesis is physically reasonable and is compatible with some anisotropy.

Remark 2. – If Ω_0 is invariant under the action of the central symmetry, then (H) is satisfied and the $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ term is exactly zero. This is a consequence of the fact that the Navier-Stokes equations are invariant by rotation. If Ω_0 is invariant under the action of the symmetries S_i , $i = 1, \dots, n$, so that $S_i(t_i) = t_i$ and $S_i(t_j) = -t_j$ if $j \neq i$, then Ω_0 is invariant by the central symmetry.

Remark 3. – In dimension 2, the hypothesis (H) can be weakened. We may assume that there exists only two independent reversibility directions. In dimension 3, we may assume that there are four reversibility directions that are three by three linearly independent.

Remark 4. – In [3] and [6] the porous medium is assumed to be “isotropic” from which the authors infer that $\int_{\Omega_0} u_1(\lambda) = 0$. It seems that this heuristic argument is not correct since a porous medium can be “isotropic” for the homogenized Stokes equations without being “isotropic” for the Navier-Stokes equations. More precisely, the possibility of K_0 to be spherical does not imply that $u_1(\lambda)$ is isotropic with respect to λ .

The main result of this Note is that if (H) is satisfied, then we have (3.4). This means that if ε is small enough, the seepage velocity almost satisfies the Darcy law with the permeability tensor K_0 ; the norm of the non linear correction is bounded from above by $c\varepsilon^2$, where the constant c depends only on the geometry of the domain.

An equivalent result can be proved for monodimensional flows without any other hypothesis than the incompressibility of the flow (*cf.* theorem 3.2).

Significant numerical examples are reported in figures 1 to 4. On the left hand side of the figures we have plotted the ratio of $\left| \int_{\Omega_0} u_\varepsilon(\lambda) - K_0 \lambda \right|$ to its maximum as a function of the relative Reynolds number R_e/R_{\max} for some values of R_{\max} . A schematic representation of the periodic cell is plotted on the right hand side of the figures.

Figure 1 concerns a rectangular cell for which $|t_1|/|t_2| = 2$. The tensor K_0 is not spheric; hence, the homogenized medium is not “isotropic” with respect to the Stokes equations. The cell is invariant by the central symmetry; hence, (H) is satisfied. One can verify on the figure that the non linear correction is quadratic for $R_e \leq 20$. The case shown corresponds to $\lambda = e^{i\pi/4}$.

Figure 2 concerns a rectangular cell which is not invariant by the central symmetry but experimentally satisfies (H). One can still check that the non linear correction is quadratic (we have chosen $\lambda = e^{i\pi/2}$).

Figure 3 concerns a monodimensional case, there is no reversibility of the seepage velocity (*i.e.* (H) is not satisfied), but theorem 3.2 applies. The non linear correction is quadratic, irrespective of the flow orientation.

Figure 4 reports on a counterexemple; it is a bidimensional case that has been built so that (H) is not experimentally satisfied (not an easy task indeed). For $\lambda = e^{i5\pi/6}$ one can check that the non linear correction is linear with respect to the Reynolds number.

1. INTRODUCTION. – On démontre dans cette Note une conjecture annoncée dans Wodié-Levy [6] et Mei-Auriault [3]: dans les milieux poreux périodiques dont les inclusions sont de taille équivalente à la période, la correction non linéaire à la loi de Darcy est quadratique en fonction du nombre de Reynolds $R_e = \rho \nabla P_0 l^3 / \mu^2$, où ∇P_0 est l'échelle de gradient de pression macroscopique, l l'échelle spatiale microscopique, ρ la masse volumique du fluide et μ sa viscosité dynamique. On montre que l'hypothèse d'isotropie faite dans [6] et [3] n'est pas nécessaire, mais peut être remplacée par une hypothèse d'invariance par rapport au sens du flux. En conclusion nous infirmons la loi de Forchheimer. Des tests numériques illustrent ce résultat.

2. POSITION DU PROBLÈME. – On suppose le milieu poreux périodique. On se donne pour cellule périodique Ω un parallélépipède de \mathbb{R}^n engendré par les vecteurs (t_1, \dots, t_n) qu'on suppose linéairement indépendants, c'est-à-dire $\det_e(t_1, \dots, t_n) = \text{mes}(\Omega) \neq 0$, où e est la base canonique de \mathbb{R}^n (*i.e.* en se donnant e , on fixe l'échelle microscopique). La base (t_1, \dots, t_n) n'étant pas forcément orthonormée, on définit (t^1, \dots, t^n) la base covariante. Pour $i = 1, \dots, n$ on note $\partial\Omega_i^-$ la face de Ω passant par l'origine de \mathbb{R}^n (qu'on munit de sa structure affine) et telle que $\partial\Omega_i^- \cdot t^i = 0$; on pose aussi $\partial\Omega_i^+ = \partial\Omega_i^- + t_i$. Soit Ω_0 un ouvert connexe de Ω , de frontière régulière (disons Lipschitz et d'un seul côté de sa frontière). Pour $i = 1, \dots, n$ on pose $\partial\Omega_{i,p}^\pm = \partial\Omega_i^\pm \cap \partial\Omega_0$ et on suppose que Ω_0 est compatible avec la périodicité, c'est-à-dire $\partial\Omega_{i,p}^+ = \partial\Omega_{i,p}^- + t_i$. On définit enfin, $\partial\Omega_{0,s} = \partial\Omega_0 \setminus \bigcup_{i=1}^n \partial\Omega_{i,p}^\pm$.

On suppose que $\text{mes}(\partial\Omega_{0,s}) \neq 0$ et $\text{mes}(\partial\Omega_{i,p}^-) \neq 0$ pour $i = 1, \dots, n$. On introduit maintenant le cadre fonctionnel habituel: soient $H_{0,p}^1(\Omega_0) = \{v \in H^1(\Omega_0), v|_{\partial\Omega_{0,s}} = 0, v|_{\partial\Omega_{i,p}^-} = v|_{\partial\Omega_{i,p}^+}\}$ et $V = \{v \in H_{0,p}^1(\Omega_0), \text{div } v = 0\}$.

Dans un premier temps on considère le problème suivant: pour $\lambda \in S_n(0, 1)$ (la sphère unité de \mathbb{R}^n , *i.e.* on fixe le gradient de pression macroscopique de référence), trouver $u_0(\lambda) \in V$ tel que

$$(2.1) \quad \forall v \in V, \quad (\nabla u_0(\lambda), \nabla v) = (\lambda, v).$$

Ce problème de Stokes est bien posé, car l'hypothèse $\text{mes}(\partial\Omega_{0,s}) \neq 0$ assure une inégalité de Poincaré, et le théorème de Lax-Milgram permet de conclure. On introduit maintenant le tenseur de perméabilité $K_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tel que $K_0 \lambda = \int_{\Omega_0} u_0(\lambda)$. On a le résultat suivant

PROPOSITION 2.1. – *Le tenseur K_0 est symétrique défini positif.*

Ce résultat est bien connu. Sa démonstration dans le cas d'une cellule non rectangulaire l'est un peu moins et repose sur l'identité

$$(2.2) \quad i = 1, \dots, n, \quad \forall v \in V, \quad \left(\int_{\Omega_0} v, t^i \right) = - \int_{\partial\Omega_{i,p}^-} v \cdot n,$$

et, évidemment, sur la connexité de Ω_0 . Dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation on interprète la relation $K_0 \lambda = \int_{\Omega_0} u_0(\lambda)$ comme la loi de Darcy (cf. Bensoussan-Lions-Papanicolaou [1], Sanchez-Palencia [4] et Tartar [5]). L'objectif de cette Note est d'étudier la correction non linéaire de cette relation dans le cadre des équations de Navier-Stokes.

On se place maintenant en dimension $n = 2$ ou 3 . On introduit la forme trilineaire $b(u, v, w) = (u \cdot \nabla v, w)$; b est continue sur $H_{0,p}^1(\Omega_0)^3$, pour $n = 2$ ou 3 , on note c_b la norme de b sur $H_{0,p}^1(\Omega_0)^3$. On s'intéresse au problème de Navier-Stokes: pour $\varepsilon \geq 0$ et $\lambda \in S_n(0, 1)$ trouver $u_\varepsilon(\lambda) \in V$ tel que

$$(2.3) \quad \forall v \in V, \quad (\nabla u_\varepsilon(\lambda), \nabla v) + \varepsilon b(u_\varepsilon(\lambda), u_\varepsilon(\lambda), v) = (\lambda, v).$$

PROPOSITION 2.2. – Si $\varepsilon < c_0(\Omega_0)^2/2c_b \text{mes}(\Omega_0)$, où $c_0(\Omega_0)$ est la constante de Poincaré du domaine Ω_0 , il existe une solution unique au problème ci-dessus.

Ce résultat est classique. On utilise l'inégalité de Poincaré et un théorème d'existence général basé sur le théorème de point fixe de Brouwer (e.g. cf. th. 1.3, p. 282, Girault-Raviart [2]).

Par la suite, on caractérise la dépendance de $\int_{\Omega_0} u_\varepsilon(\lambda)$ par rapport à λ pour ε petit.

3. CORRECTION NON LINÉAIRE DE LA LOI DE DARCY. – Afin d'obtenir une dépendance en ε , on cherche un développement de $u_\varepsilon(\lambda)$ sous la forme $u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots$. De façon plus précise et rigoureuse on définit $u_0(\lambda) \in V$ et $u_1(\lambda) \in V$ tels que

$$(3.1) \quad \forall v \in V, \quad (\nabla u_0(\lambda), \nabla v) = (\lambda, v),$$

et

$$(3.2) \quad \forall v \in V, \quad (\nabla u_1(\lambda), \nabla v) = -b(u_0(\lambda), u_0(\lambda), v).$$

Il est clair que ε induit une perturbation régulière, et on établit facilement

LEMME 3.1. – Pour $\varepsilon < c_0(\Omega_0)^2/2c_b \text{mes}(\Omega_0)$ on a

$$(3.3) \quad \begin{cases} \|u_\varepsilon(\lambda) - u_0(\lambda)\|_1 \leq \varepsilon c_b/c_0(\Omega_0)^3 \\ \text{et} \\ \|u_\varepsilon(\lambda) - u_0(\lambda) - \varepsilon u_1(\lambda)\|_1 \leq 2\varepsilon^2 c_b^2/c_0(\Omega_0)^4. \end{cases}$$

Ce lemme montre que $u_0(\lambda) + \varepsilon u_1(\lambda)$ est une bonne approximation de $u_\varepsilon(\lambda)$ dans $H_{0,p}^1(\Omega_0)$.

On introduit maintenant l'hypothèse centrale de ce travail:

(H) On suppose que pour tout $\lambda \in S_n(0, 1)$ et tout ε suffisamment petit, $u_\varepsilon(\lambda)$ satisfait:

$$\int_{\Omega_0} u_\varepsilon(\lambda) = - \int_{\Omega_0} u_\varepsilon(-\lambda) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Remarque 1. – Cette hypothèse signifie qu'un renversement du gradient de pression macroscopique implique un renversement de la vitesse de filtration sans altération notable de son module, et ce indépendamment du nombre de Reynolds (supposé petit), le résultat de l'expérience pouvant dépendre de la direction (non orientée) du gradient de pression en question.

PROPOSITION 3.3. – Si Ω_0 est invariant par symétrie centrale, (H) est vérifiée et la correction $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ est exactement nulle indépendamment de ε .

Ce résultat découle du fait que les équations de Navier-Stokes sont invariantes par rotation.

Remarque 2. – Si Ω_0 est invariant par rapport aux symétries S_i , $i = 1, \dots, n$, telles que $S_i(t_i) = t_i$ et $S_i(t_j) = -t_j$ si $j \neq i$, alors Ω_0 est invariant par symétrie centrale (voir aussi [7], p. 78).

Remarque 3. – En dimension 2, on peut affaiblir l'hypothèse (H) en supposant uniquement l'existence de deux directions de réversibilité linéairement indépendantes. En dimension 3, on peut supposer l'existence de quatre directions de réversibilité trois à trois linéairement indépendantes.

Remarque 4. – Dans [3] et [6] le milieu est supposé « isotrope » et les auteurs en déduisent $\int_{\Omega_0} u_1(\lambda) = 0$. Ce raisonnement heuristique ne semble pas correct car un milieu poreux peut être « isotrope » pour les équations de Stokes homogénéisées sans l'être pour les équations de Navier-Stokes. Plus précisément K_0 peut-être sphérique sans que pour autant la dépendance de $\int_{\Omega_0} u_1(\lambda)$ par rapport à λ soit isotrope.

Le résultat central de cette Note est le suivant

THÉORÈME 3.1. – Si l'hypothèse (H) est satisfaite, on a

$$(3.4) \quad \forall \lambda \in S_n(0, 1), \quad \int_{\Omega_0} u_\varepsilon(\lambda) = K_0 \lambda + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Ce résultat signifie que pour ε petit, la vitesse de filtration vérifie quasiment la loi de Darcy avec le tenseur de perméabilité K_0 , la norme de l'erreur étant bornée par $c\varepsilon^2$, où la constante c ne dépend que de la géométrie du domaine.

Comme il a déjà été remarqué dans [6] et [3], on peut s'affranchir de l'hypothèse (H) si l'écoulement de filtration est monodimensionnel. Plus précisément, supposons que $\text{mes}(\partial\Omega_{i,p}^-) = 0$ pour $i = 2, \dots, n$. Grâce à l'égalité (2.2) et la proposition 2.1, on vérifie $\ker(K_0)^\perp = \text{Im}(K_0) = \langle t_1 \rangle$, c'est-à-dire K_0 se réduit à la multiplication par une constante; on montre alors

THÉORÈME 3.2. – Dans le cas monodimensionnel, on a

$$(3.5) \quad \forall \lambda \in \{t_1/|t_1|, -t_1/|t_1|\}, \quad \int_{\Omega_0} u_\varepsilon(\lambda) = K_0 \lambda + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Démonstration. – Ce résultat repose sur le lemme 3.1 et sur la relation $\left(\int_{\Omega_0} u_1(\lambda), \lambda\right) = 0$, valable dans \mathbb{R}^n .

4. ILLUSTRATIONS NUMÉRIQUES. – Les résultats annoncés ici font en fait suite à une série d'expérimentations numériques en dimension 2 sur des réseaux périodiques. Nous rapportons ci-dessous quelques unes de ces expériences afin d'illustrer les théorèmes 3.1 et 3.2

Les figures 1 à 4 résument des résultats numériques significatifs pour quatre configurations différentes. A gauche on représente l'évolution de $\left|\int_{\Omega_0} u_\varepsilon(\lambda) - K_0 \lambda\right|$ normalisé par son maximum en fonction du nombre de Reynolds relatif R_e/R_{\max} pour

différentes valeurs du Reynolds maximum R_{\max} . A droite des figures on a représenté la configuration périodique correspondante. Dans tous les cas on a choisi $|t_1| = 1$.

La figure 1 concerne un réseau rectangulaire de rapport $|t_1|/|t_2| = 2$. Le tenseur K_0 n'est pas sphérique, le milieu homogénéisé n'est donc pas « isotrope » pour les équations de Stokes. Ce réseau est à symétrie centrale; il satisfait donc (H). On vérifie sur la figure que pour $R_e \leq 20$, la correction non linéaire est parfaitement quadratique. Le cas présenté correspond à $\lambda = e^{i\pi/4}$.

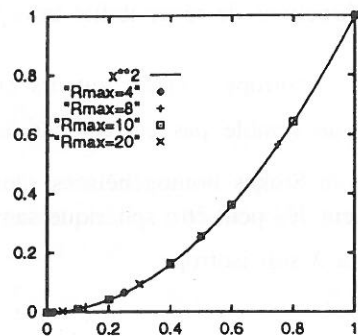
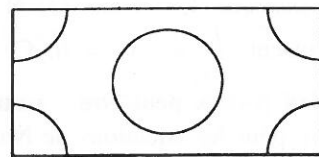


Fig. 1. – Cas anisotrope à symétrie centrale.
Fig. 1. – Anisotropic case with central symmetry.



La figure 2 concerne un réseau rectangulaire qui n'est pas à symétrie centrale mais qui satisfait (H) expérimentalement. On vérifie encore ici que la correction non linéaire est quadratique (on a pris $\lambda = e^{i\pi/2}$).

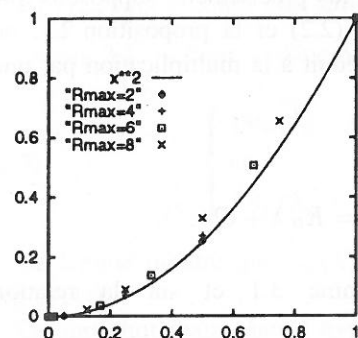
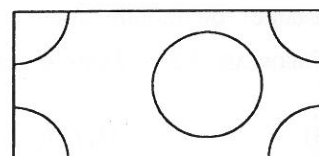


Fig. 2. – Cas anisotrope avec (H) vérifiée expérimentalement.
Fig. 2. – Anisotropic case for which (H) is satisfied experimentally.



La figure 3 concerne un cas monodimensionnel. Il n'y a pas de réversibilité [*i.e.* (H) n'est pas vérifiée], mais le théorème 3.2 s'applique. Indépendamment du sens de l'écoulement et pour $R_e \leq 10$ on vérifie que la correction non linéaire est quadratique.

La figure 4 concerne un cas bidimensionnel fabriqué de telle sorte qu'il ne satisfait pas (H). Ce cas a été assez difficile à exhiber. Pour $\lambda = e^{i5\pi/6}$ on vérifie que la correction non linéaire est linéaire en fonction du nombre de Reynolds.

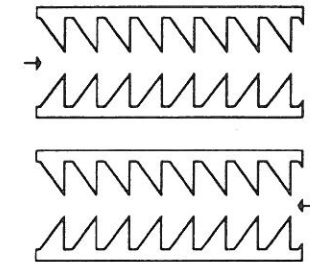
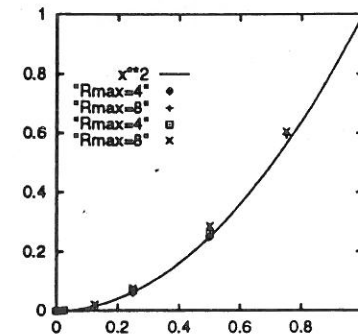


Fig. 3. – Cas monodimensionnel sans réversibilité du flux.
Fig. 3. – Monodimensional case without reversibility of the flux.

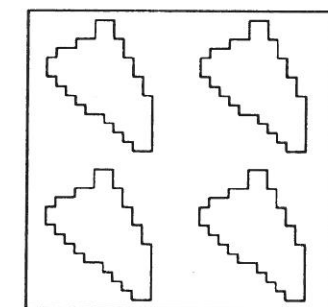
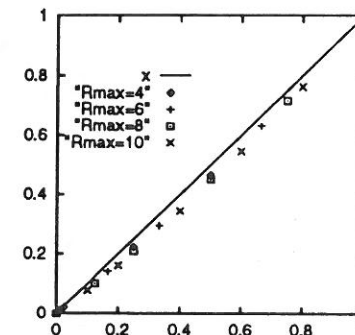


Fig. 4. – Cas anisotrope avec (H) non vérifiée.
Fig. 4. – Anisotropic case for which (H) is not satisfied.

Les auteurs tiennent à remercier P. Le Quéré pour les nombreuses discussions qu'ils ont eues avec lui et l'aide apportée au cours de ce travail.

Note remise le 29 septembre 1994, acceptée le 10 novembre 1994.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. BENSOUSSAN, J.-L. LIONS et G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North Holland, 1978.
- [2] V. GIRAULT et P.-A. RAVIART, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer Ser. Comput. Math., 5, Springer-Verlag, 1986.
- [3] C. C. MEI et J.-L. AURIAULT, The effect of weak inertia on flow through a porous medium, *J. Fluid Mech.*, 222, 1991, p. 647-663.
- [4] E. SANCHEZ-PALENCIA, *Non homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Phys., Springer-Verlag, 1980.
- [5] L. TARTAR, *Convergence of the homogenization process*, Appendice de [4], 1980.
- [6] J.-C. WODIE et T. LEVY, Correction non linéaire de la loi de Darcy, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 312, série II, 1991, p. 157-161.
- [7] J.-C. WODIE, Contribution à l'étude des milieux poreux par la méthode de l'homogénéisation : filtration non linéaire, milieux fissurés, *Thèse*, Paris-VI, 1992.