

UNE APPROXIMATION DE GALERKIN DISCONTINUE DE TYPE $h-p$ DES ÉCOULEMENTS POTENTIELS

par

Jean-Luc GUERMOND (*) et Sophie FONTAINE (**)

RÉSUMÉ

On présente une approximation de Galerkin discontinue de type $h-p$ pour l'écoulement potentiel stationnaire autour d'un corps non portant. Le problème est résolu sous sa forme intégrale. Le maillage de la surface du corps est déstructuré et peut être fourni par un système de CAO standard. On décrit aussi des quadratures numériques permettant d'évaluer les potentiels de simple et double couche, et plus généralement, d'évaluer des intégrales surfaciques comportant des noyaux pseudo-homogènes de degré -1 .

Mots clés (lexique CEDOCAR) : Méthode intégrale – Approximation méthode Galerkin – Potentiel couche – Quadratures numériques.

A DISCONTINUOUS $h-p$ GALERKIN APPROXIMATION OF POTENTIAL FLOWS

ABSTRACT

A discontinuous $h-p$ Galerkin method is presented for solving steady potential flows about nonlifting bodies. The problem is solved by means of the boundary integral equation formulation. The body surface panels may be unstructured so then can be produced by a standard CAD system. Furthermore, numerical quadratures for calculating single and double-layer potentials are given. More generally, these numerical quadratures are shown to be useful for evaluating surface integral involving kernels which are pseudo-homogeneous of degree minus one.

Keywords (NASA thesaurus): Boundary integral method – Approximation Galerkin method – Layer potentials – Numerical quadrature.

(*) LIMSI-CNRS, BP n° 133, 91403 Orsay Cedex.

(**) Stagiaire de thèse, Bassin d'Essais des Carènes, 6, boulevard Victor, 75732 Paris.

1. — INTRODUCTION

Pour une large classe de phénomènes physiques linéaires il est possible d'exhiber une fonction de Green, solution élémentaire des équations de conservation associées aux phénomènes en question. On peut citer à ce propos le problème de Helmholtz, le problème de l'élasticité linéaire, le problème de Stokes ou bien encore les problèmes d'écoulements de fluide parfaits incompressibles ou faiblement compressibles. Via les identités de Green, et sous réserve que la frontière $\partial\Omega$ du domaine considéré soit suffisamment régulière, la recherche de la fonction scalaire ou vectorielle représentative du phénomène physique étudié, peut alors se ramener à la résolution d'une équation intégrale sur la frontière du domaine physique. Cette formulation présente l'avantage, au stade de la résolution numérique, de ne requérir que la discrétisation de la frontière $\partial\Omega$, et de ne manipuler que les valeurs de la fonction inconnue sur cette frontière, les seules d'intérêt pratique en général. Ces caractéristiques agréables sont spécifiques des méthodes répertoriées sous le nom générique de méthodes intégrales (cf. Nedelec [14] pour une revue de ces méthodes).

En aérodynamique on s'intéresse plus particulièrement à la détermination du potentiel de perturbation induit par le déplacement à la vitesse V_∞ d'un corps Ω plongé dans un fluide parfait faiblement compressible. Le potentiel en question est solution du problème de Neumann extérieur suivant :

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, \\ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} &= -(V_\infty, n_P), \quad \text{p. p. } P \in \partial\Omega, \\ u &\rightarrow 0, \quad \text{à l'infini,} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

où n_P désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$ en P et (\cdot, \cdot) le produit scalaire de \mathbb{R}^3 . Par la suite on note $g(P) \equiv -(V_\infty, n_P)$. Une formulation intégrale possible du problème consiste à rechercher une fonction u vérifiant :

$$\begin{aligned} u(M) - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{|M-P|} d\sigma_P \\ = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} g(P) \frac{d\sigma_P}{|M-P|}, \end{aligned} \quad (2)$$

pour presque tout M appartenant à $\partial\Omega$. On est ainsi amené à résoudre une équation de Fredholm de seconde espèce, dont l'inconnue est la trace du potentiel sur la frontière $\partial\Omega$. Après résolution, le potentiel est donné en tout point de l'espace, si nécessaire, par une simple intégration.

La recherche d'une approximation numérique de (2) peut être envisagée de plusieurs manières. La plus ancienne semble-t-il, et techniquement la plus aisée à

mettre en œuvre est la méthode de collocation. En aérodynamique cette méthode a été introduite par J. L. Hess et A. M. O. Smith [7]. Elle consiste à réaliser une partition de $\partial\Omega$ en petites facettes planes $(\Gamma_i)_{i \in I}$, et à rechercher l'approximation de u , constante par morceaux sur les Γ_i , qui vérifie (2) aux centroïdes des facettes. On aboutit à un système linéaire dont les inconnues sont les approximations constantes de u sur les Γ_i . La principale difficulté liée à ce type de méthode réside dans le contrôle théorique de la convergence. En fait, il est possible de montrer que la méthode de collocation correspond à une approximation de Galerkin de degré zéro associée à une intégration numérique à un point de Gauss [9]. Ainsi la méthode de collocation est la combinaison d'une approximation fonctionnelle et d'une quadrature numérique. Pour cette raison on peut lui préférer la méthode des éléments finis de frontière [4, 14] ou la méthode de Galerkin [9] pour lesquelles le cadre fonctionnel est découpé du problème des quadratures.

Quelle que soit la méthode de résolution retenue il faut toujours calculer une matrice d'influence; ainsi on est toujours amené à calculer l'influence d'une famille de facettes $(\Gamma_i)_{i \in I}$ en des points M de $\partial\Omega$ sous la forme :

$$\int_{\Gamma_i} s(P) K(M, P) d\sigma_P \equiv \mathcal{K}[s, M, i], \quad (3)$$

où le noyau $K(M, P)$ est associé à un potentiel de simple ou double couche. L'approximation numérique de (3) est l'une des difficultés majeures associées à la présente formulation intégrale. Le noyau $K(M, P)$, bien qu'étant localement intégrable, est singulier et l'approximation de (3) doit être faite avec beaucoup de soins lorsque le point M appartient à Γ_i ou en est très proche.

Le présent article a deux objectifs. Dans un premier temps on présente une approximation de Galerkin discontinue de type h - p pour la résolution de l'équation intégrale (2). L'une des originalités de l'approche est que la frontière $\partial\Omega$ est censée être représentée exactement par un atlas régulier $(\Gamma_i, \psi_i)_{i \in I}$. L'atlas peut être déstructuré et généré à partir d'un système de CAO standard. On abandonne ainsi la notion d'approximation de la surface $\partial\Omega$. Dans un deuxième temps on présente une méthode de quadrature originale pour évaluer (3) lorsque M appartient à l'élément Γ_i . Cette méthode est basée sur la notion de pseudo-homogénéité du noyau. En fait, l'approche proposée est applicable pour tout noyau $K(M, P)$ tel que $|M-P|K(M, P)$ est régulier, dans un voisinage de M , par rapport à un système de coordonnées polaires centré en M .

L'article est organisé comme suit. Dans la section 2 on discute des problèmes de régularité de $\partial\Omega$ et du maillage $(\Gamma_i, \psi_i)_{i \in I}$. L'approximation de Galerkin de

la solution de (2) est présentée en section 3. L'approximation numérique de (3) est présentée en section 4. Le calcul de la vitesse et de la pression sur $\partial\Omega$ ainsi que des tests numériques sont présentés en sections 5 et 6.

II. — RÉGULARITÉ DE $\partial\Omega$ ET DU MAILLAGE

II.1. — RÉGULARITÉ DE $\partial\Omega$ ET DEGRÉ D'APPROXIMATION

On développe dans cette partie trois arguments pour justifier l'approximation polynomiale de degré élevé des potentiels, la représentation de $\partial\Omega$ par des éléments courbes et l'évaluation de (3) par des quadratures numériques.

Pour calculer la pression locale, il est nécessaire d'estimer le plus précisément possible le gradient tangentiel du potentiel u ; il est donc souhaitable que le degré polynomial de l'approximation de u soit supérieur ou égal à 1. Assez généralement il est possible d'obtenir une forme analytique de (3) si les facettes Γ_i sont planes et la restriction de $s(P)$ à Γ_i est constante, voire linéaire (cf. les travaux de **Hess** et **Smith** [7]). L'hypothèse de planéité des facettes est cruciale pour obtenir des expressions analytiques de (3), elle est néanmoins très restrictive et n'est pas consistante en général avec des approximations polynomiales du potentiel de degré supérieur ou égal à 1. Notons toutefois qu'il est possible d'obtenir des approximations asymptotiques de (3) pour des surfaces algébriques de bas degré et des noyaux relativement simples (cf. le rapport de **F. T. Johnson** [10]).

Si la frontière $\partial\Omega$ n'est pas très régulière (seulement régulière par morceaux, par exemple), une approximation linéaire du potentiel de double couche nécessite [15] une représentation quadratique des facettes Γ_i au voisinage des zones non régulières. Comme la plupart des corps d'intérêt industriel possèdent des arêtes ou des zones de très forte courbure, il est donc en général souhaitable d'avoir des représentations de $\partial\Omega$ par des facettes non planes. De plus, on peut montrer [15] que si $\partial\Omega$ est très régulière (au moins uniformément C^r , r suffisamment grand), une approximation polynomiale de degré p du potentiel de double couche nécessite une représentation polynomiale au moins de degré p pour les facettes Γ_i . Ainsi, même pour les surfaces très régulières il est nécessaire d'avoir une représentation de $\partial\Omega$ par des facettes non planes dès qu'on souhaite avoir une représentation du potentiel de double couche par des polynômes de degré p supérieur ou égal à 2.

L'utilisation de plus en plus intensive de la Conception Assistée par Ordinateur (CAO) dans les industries aéronautique et navale permet de définir mathématiquement les surfaces $\partial\Omega$. Les systèmes de CAO communément utilisés peuvent fournir simplement et rapidement des définitions des surfaces $\partial\Omega$ sous la forme d'atlas $(\Gamma_i, \psi_i)_{i \in I}$, où les cartes ψ_i sont le plus souvent de type polynomiales et définies sur le carré ou le simplexe unité de \mathbb{R}^2 . Dans ce contexte, il devient intéressant de faire la résolution approchée de (2) à partir de la définition CAO des Γ_i , qui est a priori exacte. On s'affranchit ainsi de la notion d'approximation de la surface $\partial\Omega$. En contrepartie, le calcul des coefficients d'influence (3) doit être fait numériquement. En fait, l'option de calculer (3) numériquement sur des domaines courbes a déjà été prise par de nombreux auteurs [2, 9, 11, 13].

II.2. — RÉGULARITÉ DE $\partial\Omega$

La régularité de $\partial\Omega$ doit être suffisante pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution de (2) dans $L^2(\partial\Omega)$. D'après [16] il suffit que $\partial\Omega$ soit Lipschitzienne. Cette condition est réalisée en pratique dès que la surface est C^1 par morceaux et dès que l'intérieur du domaine est localement d'un seul côté de sa frontière. Cette dernière hypothèse exclue les pointes et les arêtes de rebroussement. Par la suite on suppose que $\partial\Omega$ est au moins de classe C^r par morceaux, r étant suffisamment grand, et Ω est borné et localement d'un seul côté de sa frontière.

On se donne $(\Gamma_i, \psi_i)_{i \in I}$ un atlas de $\partial\Omega$ tel que $\partial\Omega = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$ et $\text{int}(\Gamma_i) \cap \text{int}(\Gamma_j) = \emptyset$ si $i \neq j$. La fonction $\psi_i : \text{int}(\hat{S}) \rightarrow \text{int}(\Gamma_i)$ est un difféomorphisme de classe C^r tel que si $\partial\Gamma_i \cap \partial\Gamma_j \neq \emptyset$ alors on a

$$\psi_i(\partial\Gamma_i \cap \partial\Gamma_j) = \psi_j(\partial\Gamma_i \cap \partial\Gamma_j).$$

II.3. — RÉGULARITÉ DU MAILLAGE

Soit \hat{S} le simplexe unité de \mathbb{R}^2 :

$$\hat{S} = \{ (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \hat{x}_1, 0 \leq \hat{x}_2, 0 \leq \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \leq 1 \}. \quad (4)$$

Soient S_{1i} , S_{2i} et S_{3i} les images par ψ_i des trois sommets \hat{S}_1 , \hat{S}_2 et \hat{S}_3 de \hat{S} . On définit $\tilde{\Gamma}_i$ l'enveloppe convexe de (S_{1i}, S_{2i}, S_{3i}) . $\tilde{\Gamma}_i$ est un simplexe de dimension 2. Soient \tilde{h}_i le diamètre de $\tilde{\Gamma}_i$ et $\tilde{\rho}_i$ le diamètre du cercle inscrit dans $\tilde{\Gamma}_i$. On dit que la triangulation $(\tilde{\Gamma}_i)_{i \in I}$ est régulière si il existe un réel strictement positif α_0 tel que pour tout $i \in I$ on ait : $0 < \alpha_0 < \tilde{\rho}_i / \tilde{h}_i$. Cette condition de régularité (cf. **Ciarlet** et **Raviart** [3]) implique alors que pour tout $i \in I$, il existe une unique application linéaire inversible $\tilde{\Psi}_i : \hat{S} \rightarrow \tilde{\Gamma}_i$ telle que pour $j \in \{1, 2, 3\}$ on ait

$\tilde{\Psi}_i(\tilde{S}_j) = S_{ji}$. Par la suite on suppose que la triangulation $(\tilde{\Gamma}_i)_{i \in I}$ est régulière. Dans ces conditions, en introduisant \tilde{h} le diamètre de \tilde{S} et $\tilde{\rho}$ le diamètre du cercle inscrit dans \tilde{S} , on a les inégalités classiques :

$$\frac{\alpha_0 \tilde{h}_i}{\tilde{h}} \leq \|D\tilde{\Psi}_i\|_{\infty, \tilde{S}} \leq \frac{\tilde{h}_i}{\tilde{\rho}}, \quad (5)$$

$$\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{h}_i} \leq \|D\tilde{\Psi}_i^{-1}\|_{\infty, \tilde{\Gamma}_i} \leq \frac{\tilde{h}}{\alpha_0 \tilde{h}_i}, \quad (6)$$

où $D\tilde{\Psi}_i(\hat{x})$ et $D\tilde{\Psi}_i^{-1}(x)$ sont respectivement les différentielles de Fréchet de $\tilde{\Psi}_i$ en \hat{x} et de $\tilde{\Psi}_i^{-1}$ en x . On rappelle que $D^j \Psi_i(\hat{x})$ est un opérateur j -linéaire de \mathbb{R}^2 dans le plan vectoriel de \mathbb{R}^3 associé au plan affine tangent à Γ_i en $x \equiv \Psi_i(\hat{x})$. Dans le cas particulier du simplexe plan $\tilde{\Gamma}_i$, le plan tangent en question coïncide avec le plan affine engendré par $\tilde{\Gamma}_i$. La notation $\|\cdot\|_{\infty, \tilde{S}}$ indique que c'est la borne supérieure sur \tilde{S} de la norme de l'opérateur multilinéaire qui est considérée.

Afin de mesurer le défaut de planéité des facettes Γ_i et de définir un caractère de régularité pour l'atlas $(\Gamma_i, \Psi_i)_{i \in I}$, on pose $E_i = \Psi_i - \tilde{\Psi}_i$. La fonction $E_i: \text{int}(\tilde{S}) \rightarrow E_i(\text{int} \tilde{S})$ est de classe C^r . On dit que l'atlas $(\Gamma_i, \Psi_i)_{i \in I}$ est régulier s'il satisfait les conditions suivantes :

(i) La triangulaire $(\tilde{\Gamma}_i)_{i \in I}$ est régulière.

(ii) Il existe r constantes c_1, \dots, c_r telles que $c_1 < 1$ et pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$ et tout $i \in I$ on a $\|D\tilde{\Psi}_i^{-1}\|_{\infty, \tilde{\Gamma}_i}^j \|D^j E_i\|_{\infty, \tilde{S}} \leq c_j$.

(iii) Il existe une constante $\beta_0 > 1$ telle que pour deux facettes adjacentes quelconques Γ_i et Γ_j , les diamètres h_i et h_j vérifient : $\tilde{h}_i/\beta_0 \leq \tilde{h}_j \leq \beta_0 \tilde{h}_i$.

La condition (i) indique que les simplexes $\tilde{\Gamma}_i$ ne sont pas trop éloignés de triangles équilatéraux, alors que la condition (ii) exprime le fait que les facettes Γ_i ne sont pas trop éloignées des simplexes plans $\tilde{\Gamma}_i$. En tenant compte de (6), on montre que E_i doit satisfaire la condition de régularité suivante :

$$\forall j \in 1, \dots, r, \quad \|D^j E_i\|_{\infty, \tilde{S}} \leq c_j \left(\frac{\tilde{h}_i}{\tilde{\rho}}\right)^j, \quad (7)$$

qui est plus explicite que la condition (ii). La condition (iii) traduit le fait que deux facettes voisines doivent avoir des diamètres équivalents. Des exemples de maillages réguliers pour $\sup_{i \in I}(\tilde{h}_i)$ suffisamment petit sont donnés par **Ciarlet** et **Raviart** [3].

A ce niveau, il est important de remarquer que l'on n'impose pas aux sommets des facettes Γ_i de correspondre les uns aux autres. Un sommet d'une facette Γ_i peut se trouver sur le bord d'une autre facette Γ_j sans coïncider avec un sommet de Γ_j . Cette situation, totalement inacceptable pour une approximation par éléments finis, facilite grandement la génération du maillage $(\Gamma_i, \Psi_i)_{i \in I}$. Ce degré de liberté supplémentaire par rapport aux éléments finis est

toutefois régulé par la condition (iii). Notons que pour un maillage régulier d'éléments finis, la condition (iii) est automatiquement satisfaite.

Des tests réalisés au Bassin d'Essais des Carènes ont montré qu'un ingénieur spécialiste de CAO, ayant une connaissance minimale de l'analyse numérique peut créer rapidement, à moindre coût, des maillages réguliers de corps complexes à l'aide d'un système de CAO standard : STRIM 100, CIRCE, etc. (cf. Fig. 1). Cette procédure simplifie notablement l'étape du maillage de $\partial\Omega$ et augmente l'interactivité entre la phase de conception et la phase du calcul hydrodynamique. Sur la figure 1 on présente des maillages réguliers pour un sous-marin test et un ellipsoïde, ces maillages ont été réalisés à l'aide d'un logiciel de CAO standard. On vérifie sur ces maillages que les sommets de certaines facettes ne coïncident pas avec ceux des facettes adjacentes. Les nombres de facettes ont été choisis assez grands pour que les représentations graphiques par des facettes planes soient représentatives des formes réelles. En pratique la méthode h - p permet de faire des calculs précis avec beaucoup moins de facettes (cf. VI,2).

III. — L'APPROXIMATION DE GALERKIN

III.1. — CHOIX DE LA MÉTHODE D'APPROXIMATION

L'objectif du présent travail est de fournir à des hydrodynamiciens un outil de calcul simple, basé sur une méthode d'approximation relativement bien justifiée sur le plan mathématique [9]. Le programme doit être utilisable par des ingénieurs concepteurs, non spécialistes de l'analyse numérique, et doit posséder une certaine souplesse pour permettre la réalisation ultérieure de couplages avec d'autres programmes (codes particuliers [6], couches limites, etc.). Afin de calculer la pression par différentiation de l'approximation du potentiel de double couche, on souhaite une approximation de ce potentiel par des polynômes de degré $p \geq 1$.

Les approximations par éléments finis [4, 14] ou les approximations de Galerkin continues sont puissantes mais sont relativement lourdes à programmer et à mettre en œuvre. Elles nécessitent l'utilisation d'un maillage structuré dont la complexité croît avec le degré polynomial de l'approximation des solutions recherchées. La méthode des singularités est simple à programmer mais a une convergence difficilement contrôlable. Elle nécessite aussi un maillage structuré [8, 13]. Le choix de la méthode s'est donc porté sur l'approximation de Galerkin discontinue. Le principal avantage de ce type d'approximation réside dans la

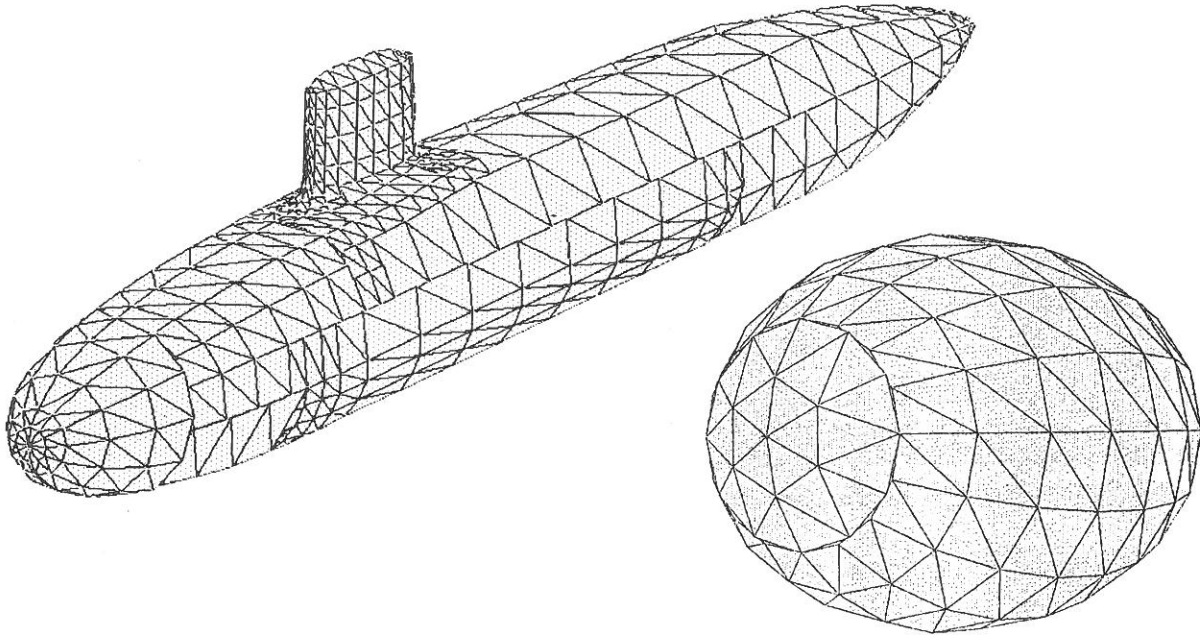


Fig. 1. — Exemples de maillages réguliers déstructurés.

simplification notable de la programmation. Contrairement à l'approximation continue, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à des tableaux d'indexation des nœuds et des facettes. On s'affranchit donc du problème de l'arrangement des facettes les unes par rapport aux autres. En contrepartie, la convergence peut, dans certains cas, être moins rapide que dans le cas de l'approximation continue [9].

III.2. — LE PROBLÈME DE TRONCATURE

Étant donné un atlas régulier de $\partial\Omega$ sous la forme $(\Gamma_i, \psi_i)_{i \in I}$, tel que le diamètre maximal des facettes soit plus petit qu'une certaine quantité h arbitrairement petite, on définit l'espace d'approximation V_{hp} par :

$$V_{hp} = \{ u_{hp} \in L^2(\partial\Omega), \forall i \in I, u_{hp}|_{\Gamma_i} = \hat{p}_i \circ \psi_i^{-1}, \text{ et } \hat{p}_i \in \mathbb{P}_p \}. \quad (8)$$

\mathbb{P}_p est l'espace vectoriel réel des polynômes de degré global inférieur ou égal à p , c'est un espace de dimension $n \equiv (p+1)(p+2)/2$. V_{hp} est l'espace des fonctions localement polynomiales sur les facettes Γ_i et de degré global inférieur ou égal à p . On impose $p < r$ pour respecter le degré de régularité de $\partial\Omega$. Notons que les fonctions d'approximation u_{hp} sont discontinues aux frontières des facettes. Le lecteur est renvoyé aux travaux de Babuška *et al.* [1] pour la version h - p de la méthode des éléments finis. Le principe de la méthode consiste à minimiser l'erreur de troncature $\|u - u_{hp}\|$ en jouant sur la taille moyenne du maillage h et sur le degré polynomial p de l'approximation.

Le problème approché de Galerkin associé à (2) consiste à trouver $u_{hp} \in V_{hp}$ tel que :

$$\left. \begin{aligned} \forall v_{hp} \in V_{hp}, \\ ((I_d - K_d)u_{hp}, v_{hp})_{L^2(\partial\Omega)} = (f, v_{hp})_{L^2(\partial\Omega)} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

où I_d est l'opérateur identité, K_d est l'opérateur de double couche et f est la convolée de g par la distribution de simple couche. La notation $(\cdot, \cdot)_{L^2(\partial\Omega)}$ représente le produit scalaire dans $L^2(\partial\Omega)$.

Soit $(\hat{q}_k)_{k=1, \dots, n}$ une base de \mathbb{P}_p , alors en notant $\chi_i : \partial\Omega \rightarrow \{0, 1\}$ la fonction caractéristique de la facette Γ_i , la famille $(\chi_i \hat{q}_k \circ \psi_i^{-1})_{i \in I, k=1, \dots, n}$ définit une base de V_{hp} . On pose donc :

$$u_{hp} = \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^n u_{ik} \chi_i \hat{q}_k \circ \psi_i^{-1}. \quad (10)$$

Le problème (9) se met alors sous la forme discrète :

$$\left. \begin{aligned} \forall j \in I, \quad \forall l \in \{1, \dots, n\} \\ \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^n u_{ik} ((I_d - K_d)(\chi_i \hat{q}_k \circ \psi_i^{-1}), \chi_j \hat{q}_l \circ \psi_j^{-1})_{L^2(\partial\Omega)} \\ = (f, \chi_j \hat{q}_l \circ \psi_j^{-1})_{L^2(\partial\Omega)}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

On doit donc résoudre le système linéaire $AU = B$, d'ordre $n \cdot \text{card}(I)$, avec :

$$\left. \begin{aligned} A_{\alpha\beta} &= \delta_{ij} \|\hat{q}_k \circ \psi_i^{-1}\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 \\ &\quad - (K_d(\chi_i \hat{q}_k \circ \psi_i^{-1}), \hat{q}_l \circ \psi_j^{-1})_{L^2(\Gamma_j)}, \\ U_\beta &= u_{ik}, \\ B_\alpha &= (f, \hat{q}_l \circ \psi_j^{-1})_{L^2(\Gamma_j)}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

où les indices α et β sont définis par $\alpha \equiv (j-1)n+l$ et $\beta \equiv (i-1)n+k$. Le problème numérique consiste maintenant à donner des approximations des coefficients de A et B .

Sous des hypothèses de régularité un peu plus fortes que celles énoncées en § 2.2 (i.e. $\partial\Omega$ uniformément C^r), on peut montrer que le problème (11) est bien posé pour h suffisamment petit à p fixé [9]. La démonstration repose sur la compacité de $K_d : L^2(\partial\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$. Sous les seules hypothèses de régularité § 2.2, l'opérateur K_d n'est plus compact et, à notre connaissance, l'inversibilité du système linéaire et le problème de la convergence de la méthode restent ouverts (cf. [16] pour des arguments de substitution à la compacité de K_d). On admet par la suite l'inversibilité du système linéaire pour h suffisamment petit ainsi que la convergence de la méthode.

III,3. — LES PROBLÈMES DE QUADRATURES

Afin de donner des approximations numériques des coefficients de la matrice d'influence A et du vecteur second membre B , il faut chercher des quadratures permettant d'approximer convenablement l'opérateur K_d , la fonction f et le produit scalaire de $L^2(\partial\Omega)$.

Considérons la quadrature

$$\int_{\hat{S}} \hat{q} d\sigma \approx \sum_{m=1}^M \omega_m^{\text{scal}} \hat{q}(\hat{x}_{1m}, \hat{x}_{2m})$$

supposée exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à $2p$. La forme continue du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Gamma_i)}$ est alors remplacée par la forme discrète approchée suivante :

$$(g, h)_{L^2(\Gamma_i)} \approx \sum_{m=1}^M \omega_m^{\text{scal}} g \circ \psi_i(\hat{x}_{1m}, \hat{x}_{2m}) h \circ \psi_i(\hat{x}_{1m}, \hat{x}_{2m}) J_i(\hat{x}_{1m}, \hat{x}_{2m}), \quad (13)$$

où J_i est le jacobien de ψ_i . L'ordre de la quadrature est choisi de telle sorte que $\int_{\hat{S}} \hat{p}\hat{q} d\sigma$ soit évalué exactement pour $\hat{p}, \hat{q} \in \mathbb{P}_p$.

L'approximation de l'opérateur K_d et de la fonction f consiste à rechercher des approximations des intégrales de convolutions du type (3). La section suivante est consacrée à la recherche de telles quadratures.

IV. — APPROXIMATION NUMÉRIQUE DE $\mathcal{K}[s, M, i]$

4.1. — LA PSEUDO-HOMOGENÉITÉ

Dans ce qui suit, on note indifféremment $K(M, P)$ le noyau de simple ou de double couche. En fait, la

seule hypothèse nécessaire sur $K(M, P)$ consiste à supposer que le noyau est pseudo-homogène de degré -1 . Pour illustrer cette notion on introduit les coordonnées polaires (r, θ) centrées en M telles que

$$r = |M - P|, \quad \theta = \frac{P - M}{r} \quad (14)$$

On dit qu'une fonction $K(M, \cdot)$ est pseudo-homogène de degré -1 jusqu'à l'ordre k , si dans un voisinage $U \cap \partial\Omega - \{M\}$ de M , la fonction $(r, \theta) \mapsto rK(M, r, \theta)$ est régulière et ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à k sont bornées (cf. [5] pour d'autres détails).

Pour une autre définition un peu moins générale de la pseudo-homogénéité, le lecteur est renvoyé à [9].

On peut montrer [5] que les noyaux de simple et double couche de l'équation de Laplace ou de Helmholtz en milieu infini sont pseudo-homogènes de degré -1 . Il en est de même pour les noyaux de simple couche du problème de Stokes et du problème de l'élasticité linéaire.

IV,2. — TROIS TYPES D'APPROXIMATIONS

Bien que les noyaux pseudo-homogènes de degré -1 soient localement intégrables sur Γ_i , l'approximation numérique de $\mathcal{K}[s, M, i]$ peut être rendue délicate par le comportement singulier ou pseudo-singulier de ces noyaux lorsque M est voisin de Γ_i .

En effet, si le point M est sur la facette Γ_i , le noyau $K(M, P)$ tend vers l'infini lorsque P tend vers M . Par la suite, on dit que M est en champ proche de Γ_i si $M \in \Gamma_i$. Si, sans appartenir à Γ_i , le point M en est à une distance comparable au diamètre \tilde{h}_i , c'est-à-dire si :

$$a\tilde{h}_i \leq \text{dist}(M, \Gamma_i) < b\tilde{h}_i, \quad (15)$$

où a et b sont des constantes strictement positives à définir, alors on dit que M est en champ intermédiaire. Si la distance de M à l'élément Γ_i est supérieure à $b\tilde{h}_i$, on dit que M est en champ lointain.

IV,3. — APPROXIMATION EN CHAMP PROCHE

Soit Γ_i une facette du maillage. Par la suite on note $\hat{M} \equiv \psi_i^{-1}(M)$ et $\hat{P} \equiv \psi_i^{-1}(P)$ pour tout $P \in \Gamma_i$. On suppose que \hat{M} appartient à un ensemble fini de points de quadratures définis par (13) et qu'aucun de ces points n'est sur la frontière de \hat{S} . On note \hat{Q}_p cet ensemble. On définit le noyau image $K(\psi_i(\hat{M}), \psi_i(\hat{P}))$ sur \hat{S} . On introduit dans le plan du simplexe unité les coordonnées polaires $(\hat{\rho}, \hat{\theta})$, centrées autour du point \hat{M} de coordonnée $(\hat{x}_{1M}, \hat{x}_{2M})$:

$$\begin{cases} \hat{\rho} \cos(\hat{\theta}) = \hat{x}_1 - \hat{x}_{1M}, \\ \hat{\rho} \sin(\hat{\theta}) = \hat{x}_2 - \hat{x}_{2M}. \end{cases} \quad (16)$$

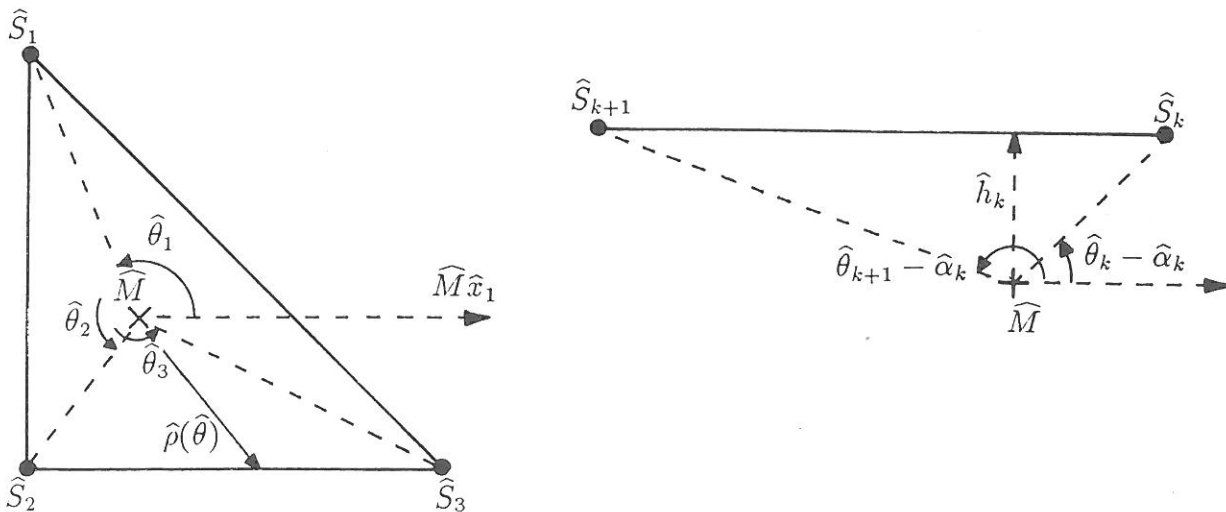


Fig. 2. — Définition des notations en coordonnées polaires.

On peut vérifier que le noyau image est encore pseudo-homogène de degré -1 en \hat{M} sur \hat{S} . Ce résultat suggère l'utilisation des coordonnées polaires $(\hat{r}, \hat{\theta})$ et de la mesure $\hat{r} d\hat{r} d\hat{\theta}$ dans le plan du simplexe de référence pour obtenir une approximation de $\mathcal{X}[s, M, i]$.

Soient $\hat{S}_1, \hat{S}_2,$ et \hat{S}_3 les trois sommets de \hat{S} , et $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2,$ et $\hat{\theta}_3$ les angles entre les demi-droites $\hat{M}\hat{S}_i (i=1, 2, 3)$ et l'axe orienté $\hat{M}\hat{x}_1$ (voir Fig. 2a). On a alors :

$$\mathcal{X}[s, M, i] = \sum_{k=1}^3 \int_{\hat{\theta}_k}^{\hat{\theta}_{k+1}} \int_0^{\hat{\rho}(\hat{\theta})} s(\hat{\rho}, \hat{\theta}) \hat{\rho} \times K(M, \hat{\rho}, \hat{\theta}) J_i(\hat{\rho}, \hat{\theta}) d\hat{\rho} d\hat{\theta}, \quad (17)$$

où $\hat{\theta}_4 \equiv \hat{\theta}_1 + 2\pi$ et $\hat{\rho}(\hat{\theta})$ est la distance maximale, pour un angle donné, entre \hat{M} et la frontière du simplexe. Il est important de noter à ce niveau, que grâce à la régularité de ψ_i , le rapport $\hat{\rho}/r$ est régulier et borné pour $\hat{\rho} \in]0, \hat{\rho}(\hat{\theta})]$ à $\hat{\theta}$ fixé. En conséquence la fonction $\hat{\rho} K(M, \hat{\rho}, \hat{\theta})$ est elle aussi régulière et bornée sur le rayon $]0, \hat{\rho}(\hat{\theta})]$. Il est donc possible d'utiliser une quadrature gaussienne pour évaluer l'intégrale linéaire suivant $\hat{\rho}$:

$$\mathcal{X}[s, M, i] \approx \sum_{k=1}^3 \int_{\hat{\theta}_k}^{\hat{\theta}_{k+1}} \hat{\rho}(\hat{\theta}) \left[\sum_{l=1}^L \omega_l^\xi s(\hat{\rho}_l(\hat{\theta}), \hat{\theta}) \times \hat{\rho}_l(\hat{\theta}) K(M, \hat{\rho}_l(\hat{\theta}), \hat{\theta}) J_i(\hat{\rho}_l(\hat{\theta}), \hat{\theta}) \right] d\hat{\theta}. \quad (18)$$

La quadrature $\int_0^1 g d\xi \approx \sum_{l=1}^L \omega_l^\xi g(\xi_l)$ est du type Gauss

Legendre à L points, et on a défini $\hat{\rho}_l(\hat{\theta}) \equiv \hat{\rho}(\hat{\theta}) \xi_l$. On suppose que l'ordre de la quadrature est supérieur ou égal à p , c'est-à-dire $2L - 1 \geq p$.

Si la fonction $s \circ \psi_i$ appartient à \mathbb{P}_p , on peut montrer [5, 9] que l'erreur de quadrature vérifie la majoration suivante :

$$E_1 \leq ch^{2L-p+1} \|s \circ \psi_i\|_{p,q,\hat{S}}, \quad (19)$$

pour tout $q \in [0, \infty]$. Ainsi, pour obtenir une erreur de quadrature en $\mathcal{O}(h^{p+1})$, il faut prendre $L \geq \sup\{(p+1)/2, p\}$.

A ce stade, l'intégration sur $\hat{\theta}$ ne pose plus de problème théorique car la fonction entre crochets dans (18) est régulière et bornée. Toutefois, bien que la fonction $\hat{\rho}(\hat{\theta})$ soit de classe C^r sur $[\hat{\theta}_k, \hat{\theta}_{k+1}]$, elle peut avoir des variations importantes. En effet, si on note $\hat{\alpha}_k$ l'angle $(\hat{M}\hat{x}_1, \hat{S}_{k+1}\hat{S}_k)$ où $\hat{S}_4 \equiv \hat{S}_1$, et si on note \hat{h}_k la distance de \hat{M} au bord $\hat{S}_k\hat{S}_{k+1}$ de \hat{S} , alors la distance $\hat{\rho}(\hat{\theta})$ se met sous la forme :

$$\hat{\rho}(\hat{\theta}) = \frac{\hat{h}_k}{\sin(\hat{\theta} - \hat{\alpha}_k)}. \quad (20)$$

L'angle $\hat{\theta} - \hat{\alpha}_k$ est compris strictement entre 0 et π (cf. Fig. 2b). En pratique, le point \hat{M} est un point de discrétisation résultant de la quadrature (13). L'ordre de la quadrature (13) ne dépendant que de p , la distance \hat{h}_k est minorée indépendamment de h par une quantité strictement positive. Cette quantité peut toutefois être numériquement petite; par exemple pour $p=2$ on peut avoir $\hat{h}_k \approx 5 \cdot 10^{-2}$. Dans ces conditions les angles $\hat{\theta}_k - \hat{\alpha}_k$ et $\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\alpha}_k$ peuvent être voisins de 0 ou π . Il est clair dans ces conditions, que la discrétisation en $\hat{\theta}$ doit être resserrée au voisinage de $\hat{\theta}_k$ et $\hat{\theta}_{k+1}$. La mesure adaptée au problème n'est donc pas $d\hat{\theta}$ mais plutôt $d\hat{\theta}/\sin(\hat{\theta} - \hat{\alpha}_k)$. Ainsi, il convient

de faire le changement de variable suivant :

$$\eta = \frac{2}{\Delta_k} \left(\ln \left[\tan \left(\frac{\hat{\theta} - \hat{\alpha}_k}{2} \right) \right] - \ln \left[\tan \left(\frac{\hat{\theta}_k - \hat{\alpha}_k}{2} \right) \right] - \ln \left[\tan \left(\frac{\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\alpha}_k}{2} \right) \right] \right). \quad (21)$$

où on a posé :

$$\Delta_k = \ln \left[\tan \left(\frac{\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\alpha}_k}{2} \right) \right] - \ln \left[\tan \left(\frac{\hat{\theta}_k - \hat{\alpha}_k}{2} \right) \right]. \quad (22)$$

En remplaçant $\hat{\theta}$ par η et en choisissant pour l'intégration suivant η une quadrature du type Gauss Legendre à N points : $\int_{-1}^{+1} g d\xi \approx \sum_{n=1}^N \omega_n^n g(\eta_n)$, on obtient l'approximation suivante :

$$\mathcal{H}[s, M, i] \approx \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{h}_k}{2} \Delta_k \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^L \omega_n^l \omega_l^k \times s(\hat{\rho}_{ln}, \hat{\theta}_n) \hat{\rho}_{ln} K(M, \hat{\rho}_{ln}, \hat{\theta}_n) J_i(\hat{\rho}_{ln}, \hat{\theta}_n). \quad (23)$$

où on a posé $\hat{\rho}_{ln} \equiv \hat{\rho}_l(\hat{\theta}_n)$. On suppose ici que N est tel que $2N - 1 \geq p$.

On peut montrer que si N est assez grand, l'erreur de quadrature introduite à ce niveau est telle que

$$E_2 \leq \text{ch}(\Delta/2\gamma)^{2N} \|s \circ \Psi_i\|_{p, \infty, \hat{s}}, \quad (24)$$

où Δ est le maximum des Δ_k pour $k=1, 2, 3$ et pour tous les \hat{M} de \hat{Q}_p , et γ est une constante strictement supérieure à $\Delta/2$ (voir [5] pour d'autres détails). En conséquence, pour obtenir une erreur en $\mathcal{O}(h^{p+1})$, il faut choisir $N \geq \sup \{ (p+1)/2, p \ln(1/h)/2 \ln(2\gamma/\Delta) \}$. Ainsi, l'intégration suivant $\hat{\theta}$ nécessite plus de points de quadrature que l'intégration suivant $\hat{\rho}$. Le rapport de N à L se comporte comme $\ln(1/h)$. Ce point est illustré par des essais numériques reportés sur les figures 3a et b.

IV.4. APPROXIMATION NUMÉRIQUE EN CHAMP LOINTAIN

Dans ce paragraphe on s'intéresse à l'approximation de (3) quand le point M est en champ lointain de Γ_i . On suppose encore que $s \circ \Psi_i$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à p . On considère la quadrature :

$$\int_{\hat{S}} \hat{q} d\sigma = \sum_{r=1}^R \omega_r^{\text{loin}} \hat{q}(\hat{x}_{1r}, \hat{x}_{2r}), \quad (25)$$

supposée exacte pour tout polynôme \hat{q} de degré inférieur ou égal à t . Le nombre de points R est une

fonction de t . On suppose $p \leq t$. On définit l'approximation de (3) par :

$$\mathcal{H}[s, M, i] \approx \sum_{r=1}^R \omega_r^{\text{loin}} s \circ \Psi_i(\hat{x}_{1r}, \hat{x}_{2r}) \times K(M, \Psi_i(\hat{x}_{1r}, \hat{x}_{2r})) J_i(\hat{x}_{1r}, \hat{x}_{2r}). \quad (26)$$

On peut montrer (cf. [5]) que l'erreur de quadrature se met sous la forme

$$E \leq c \frac{h^{2-\alpha}}{(\gamma b)^{t+1-p+\alpha}} \|s \circ \Psi_i\|_{p, q, \hat{s}}, \quad (27)$$

où γ est une constante supérieure ou égal a 1 et b est la constante de séparation du champ lointain et du champ intermédiaire. La constante α vaut 1 si K est un noyau de simple couche et elle vaut 2 si K est un noyau de double couche. Pour assurer une erreur de quadrature en $\mathcal{O}(h^{p+1})$, il faut choisir b de sorte que γb soit strictement supérieur à 1 et il faut choisir t tel que

$$t \geq \sup \{ p, p-1-\alpha+(p+\alpha-1) \ln(1/h)/\ln(\gamma b) \}.$$

Pour que t ne soit pas trop grand, il faut que la constante b soit de l'ordre de l'unité, en pratique on prend $0.2 \leq b \leq 0.4$.

IV.5. — CHAMP INTERMÉDIAIRE

Si M est en champ intermédiaire on utilise une méthode d'intégration composite. On se donne un entier N et on divise le simplexe \hat{S} en N^2 simplexes semblables $(\hat{S}_n)_{n=1, \dots, N^2}$. Sur chaque petit simplexe élémentaire \hat{S}_n on applique une quadrature gaussienne d'ordre m tel que $m \geq p$. La fonction $s \circ \Psi_i$ est encore supposée polynomiale. La quadrature peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathcal{H}[s, M, i] \approx \sum_{n=1}^{N^2} \sum_{q=1}^Q \frac{\omega_q^{\text{inter}}}{N^2} s \circ \Psi_i(\hat{x}_{1q}^n, \hat{x}_{2q}^n) \times K(M, \Psi_i(\hat{x}_{1q}^n, \hat{x}_{2q}^n)) J_i(\hat{x}_{1q}^n, \hat{x}_{2q}^n). \quad (28)$$

En réutilisant pour chaque petit simplexe l'erreur de quadrature obtenue en champ lointain, il est possible de montrer (cf. [5] pour les détails) que l'erreur de quadrature globale se met sous la forme :

$$E \leq c \frac{h^{2-\alpha}}{(\beta a N_m)^{m+1-p+\alpha}} \|s \circ \Psi_i\|_{p, q, \hat{s}}, \quad (29)$$

où β est une constante supérieure ou égale à 1 et N_m est égal à $N^{m+3/m+1-p+\alpha}$. La constante a est la constante de séparation du champ intermédiaire et du champ proche. Cette constante est encore à spécifier.

On choisit N de telle sorte que $N_m \beta a$ soit égal à une constante fixée a priori $C_m > 1$, c'est à dire;

$$N = \left(\frac{C_m}{\beta a} \right)^{m+1-p+\alpha/m+3} \quad (30)$$

Il reste maintenant à spécifier la constante a . Pour que l'erreur de quadrature tende vers zéro lorsque m croît, il faut que \tilde{h}_i/N_m soit du même ordre de grandeur que la distance minimale de M à Γ_i lorsque M parcourt l'ensemble de tous les points de quadrature de (13). C'est-à-dire, le diamètre des simplexes $\psi_i(\hat{S}_n)$ doit être comparable à la distance minimale des points M à Γ_i . Soit d_0 la distance minimale en question. On définit la constante a comme étant la borne inférieure des rapports d_0/\tilde{h}_i pour i parcourant I . Ainsi, pour que N soit majoré indépendamment du point de quadrature M , de l'élément Γ_i et de la finesse du maillage, il faut que la constante a soit minorée lorsque h tend vers zéro; c'est-à-dire, le rapport \tilde{h}_i/d_0 doit être majoré indépendamment de la finesse du maillage. C'est à ce niveau qu'intervient la condition de régularité du maillage (iii). En effet, soit Γ_j la facette à laquelle appartient M . La frontière $\partial\Omega$ étant lipschitzienne, il existe une constante c , dépendant uniquement de $\partial\Omega$, telle que $\text{dist}(M, \Gamma_i) \geq c \text{dist}(M, \partial\Gamma_j)$. Cette inégalité est précise uniquement si Γ_i et Γ_j sont proches l'une de l'autre. De plus, M est un point de Gauss de la quadrature (13), il en résulte qu'il existe une constante $\beta(p)$ strictement positive telle que $\text{dist}(M, \partial\Gamma_j) \geq \beta(p) \tilde{h}_j$. En combinant les deux inégalités précédentes, on déduit l'inégalité :

$$\frac{\tilde{h}_i}{d_0} \leq \frac{1}{c \beta(p)} \frac{\tilde{h}_i}{\tilde{h}_j} \quad (31)$$

Le problème de la majoration du rapport \tilde{h}_i/d_0 se pose uniquement lorsque la distance d_0 est petite devant le diamètre \tilde{h}_i ; dans cette condition les facettes Γ_i et Γ_j sont voisines et le rapport des diamètres est borné indépendamment de i et j d'après la condition de régularité (iii). Ainsi, le nombre N ne dépend que de $\partial\Omega$ et de p . Notons que l'hypothèse $M \notin \partial\Gamma_i$ est intervenue de façon déterminante.

Pour obtenir une erreur en $\mathcal{O}(h^{p+1})$, on montre finalement que m doit être de l'ordre de $\sup \{ p, p-1-\alpha+(p+\alpha-1) \ln(1/h)/\ln(C_m) \}$.

V. — CALCUL DE LA VITESSE ET DE LA PRESSION

Alors que les méthodes classiques de degré zéro [8, 13] (approximation du potentiel constante par facette) nécessitent l'utilisation d'un maillage structuré pour calculer la vitesse tangentielle par différences finies, la présente approche permet d'évaluer la vitesse

directement par dérivation de l'approximation polynomiale du potentiel (10). Pour déterminer la vitesse $V(M) \in \mathbb{R}^3$, on a d'une part la formule de dérivation composée :

$$D(u \circ \psi_i)(\hat{M}) = (V(M), D\psi_i(\hat{M})),$$

qui fournit deux équations et d'autre part la condition de glissement $(V, n_M) = -(V_\infty, n_M)$, qui fournit la troisième équation. Ainsi, en notant $V \equiv (V_1, V_2, V_3)$ et $n \equiv (n_1, n_2, n_3)$, on détermine les trois composantes de la vitesse en inversant le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_{i1}}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \psi_{i2}}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \psi_{i3}}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial \psi_{i1}}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial \psi_{i2}}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial \psi_{i3}}{\partial \hat{x}_2} \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_{np} \circ \psi_i}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial u_{np} \circ \psi_i}{\partial \hat{x}_2} \\ -(V_\infty, n) \end{pmatrix} \quad (32)$$

La pression est déduite de la vitesse par l'intermédiaire de la relation de Bernoulli :

$$c_p \equiv \frac{p-p_\infty}{1/2 \rho V_\infty^2} = 1 - \frac{\|V + V_\infty\|^2}{\|V_\infty\|^2} \quad (33)$$

VI. — ÉTUDE NUMÉRIQUE

VI.1. ERREUR DE QUADRATURE EN CHAMP PROCHE

Dans cette partie on présente des tests numériques destinés à valider le calcul des coefficients d'influence en champ proche.

Pour tester le calcul de $\mathcal{K}[s, M; i]$ suivant la règle (23), on considère une facette courbée et un point M proche d'un bord de la facette. Pour la fonction s on prend un polynôme de degré 1. On compare les approximations numériques obtenues avec différents couples de points de Gauss (L, N) . En faisant l'hypothèse que la précision de la machine est atteinte pour le couple (20, 20), on reporte sur les figures 3a et b le logarithme à base 10 de l'erreur de quadrature de (23) pour $L=7, 11, 16$ en fonction de N . Il apparaît clairement sur les figures en question, que l'erreur de quadrature est principalement conditionnée par le nombre N comme l'analyse théorique l'a suggéré.

VI.2. — TESTS DE CONVERGENCE EN FONCTION DE h ET p

La méthode de résolution complète est testée sur des ellipsoïdes. Sur cette famille de corps, le potentiel

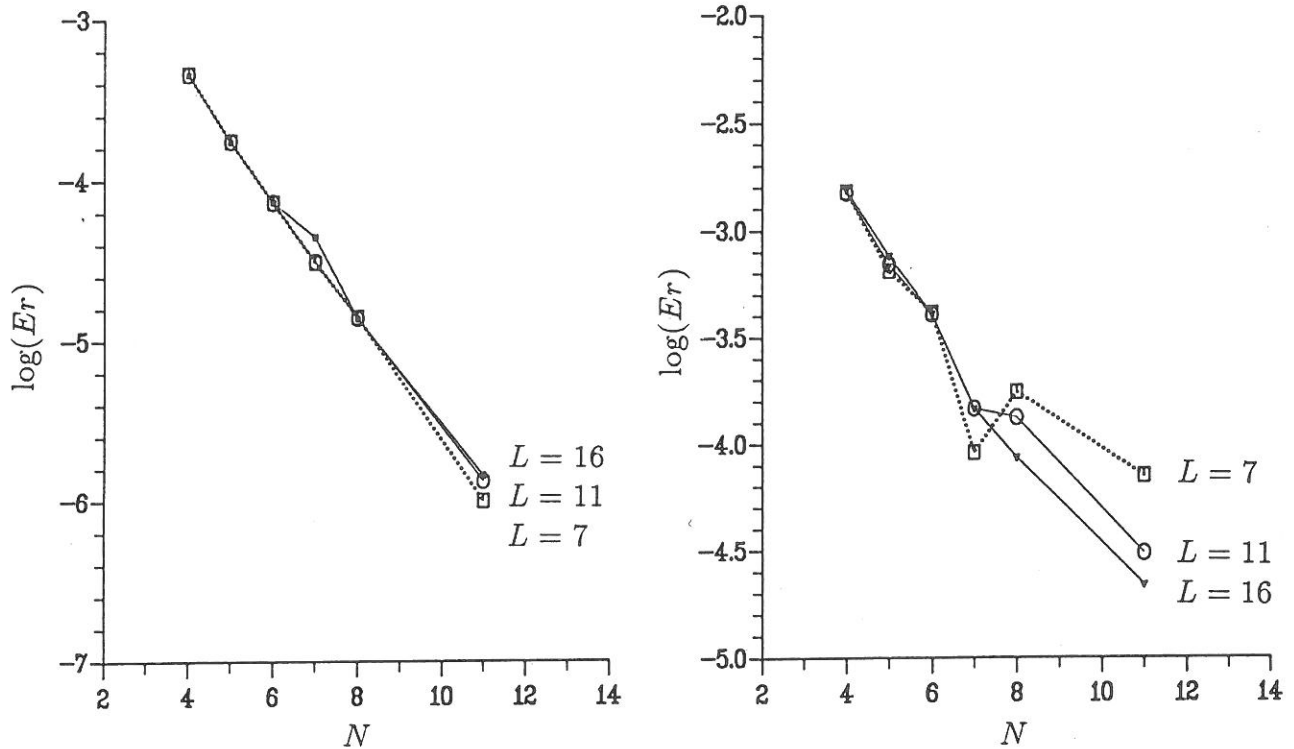


Fig. 3. — Log à base 10 de l'erreur de quadrature en champ proche en fonction de (L, N) : (a) simple couche, (b) double couche.

de perturbation est connu analytiquement [12] et est donné par :

$$u(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^3 V_{\infty k} x_k \frac{\gamma_k}{2 - \gamma_k}, \quad (34)$$

où, en notant a_1 , a_2 et a_3 les trois demi-axes de l'ellipsoïde dans les directions x_1 , x_2 et x_3 , on a :

$$\gamma_k = a_1 a_2 a_3 \times \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(a_k^2 + \lambda) [(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda)]^{1/2}}. \quad (35)$$

On étudie l'influence des paramètres h et p sur un ellipsoïde d'axes : $a_1 = 0,5$, $a_2 = 0,25$ et $a_3 = 0,25$. Sur les figures 4a et b, on a reporté pour trois valeurs de h , le logarithme à base 10 de l'erreur $\|u_{hp} - u\|_{L^2(\partial\Omega)}$, respectivement pour le potentiel et le coefficient de pression, en fonction du degré d'approximation p . Le premier ellipsoïde est décrit avec 76 facettes ($h \approx 1/5$), le second est décrit avec 304 facettes ($h \approx 1/10$) et le dernier est composé de 684 facettes ($h \approx 1/15$). Les calculs ont été faits en simple précision sur un Alliant FX80.

On vérifie sur la figure 4a que l'erreur sur le potentiel est en $\mathcal{O}(h^{p+1})$. On vérifie sur la figure 4b que la convergence sur le coefficient de pression est bien en $\mathcal{O}(h^p)$ et que la convergence théorique ne semble pas être atteinte pour $p=3$ avec 304 et 684 facettes. En fait à de tels niveaux d'erreur, les calculs étant faits

en simple précision, c'est la précision machine qui est insuffisante.

VI.3. — PRÉCISION ET QUANTITÉ DE TRAVAIL EN FONCTION DE h ET p

De façon générale si N est un nombre de facettes donné, la quantité de travail requise pour résoudre le problème discret est proportionnelle au nombre de coefficients manipulés $[N(p+1)(p+2)/2]^2$, et la précision se comporte comme $N^{-(p+1)/2}$. Pour un nombre fixé de coefficients matriciaux K , la précision évolue comme $[(p+1)(p+2)/2]^{(p+1)/2} / K^{(p+1)/4}$. Ainsi à quantité de travail fixée, la précision croît avec p jusqu'à une valeur optimale de p qui est de l'ordre de $K^{1/4}/2$.

Si N_0 est le nombre nécessaire de facettes pour atteindre une précision E donnée avec $p=0$, il faut alors $N_p \sim N_0^{1/(p+1)}$ facettes pour atteindre la même précision avec une approximation de degré p . Ainsi pour atteindre une précision fixée tout en minimisant le travail à effectuer, on a intérêt à prendre p le plus grand possible; la valeur optimale de p se comporte comme $\ln(N_0)$. En réalité le choix de p est bornée par le fait que la quantité $h \sim 1/\sqrt{N_p}$ doit être assez petite pour que le système discret soit inversible. En pratique $p=2$ ou 3 semble être un bon compromis.

Pour comparer la méthode des singularités classique avec la présente méthode il est intéressant de faire

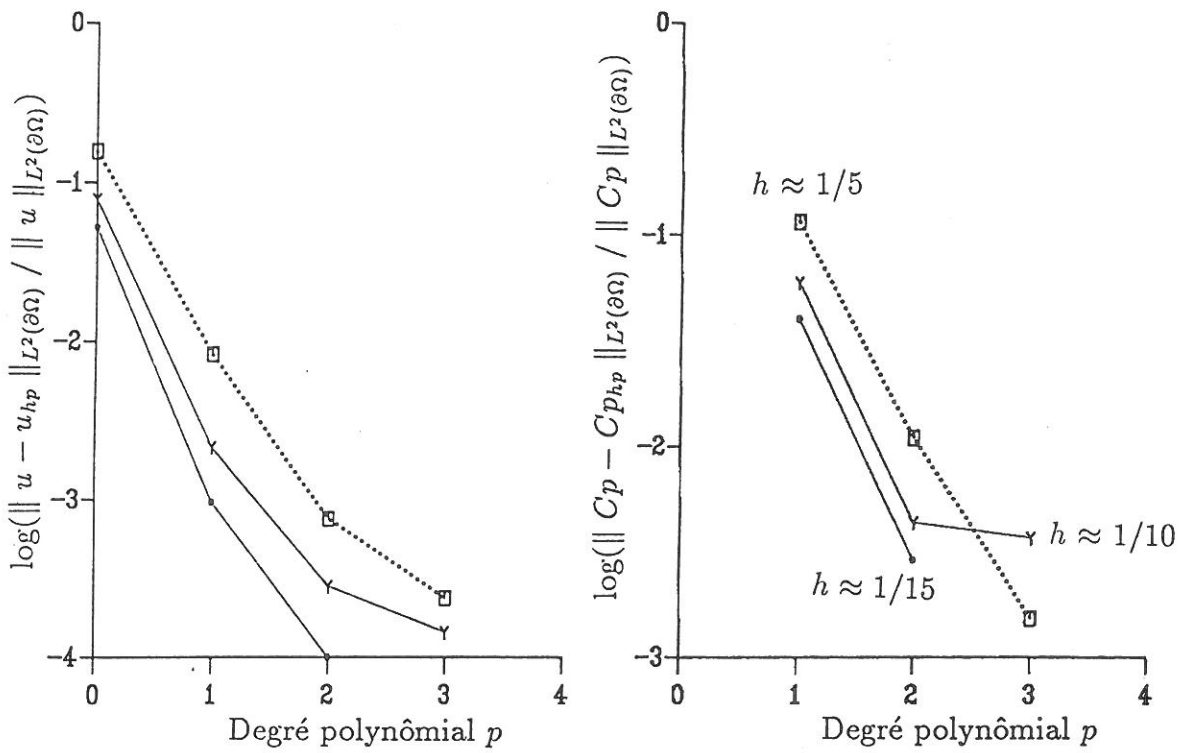


Fig. 4. — Erreur L^2 en fonction de h et p : (a) potentiel, (b) pression.

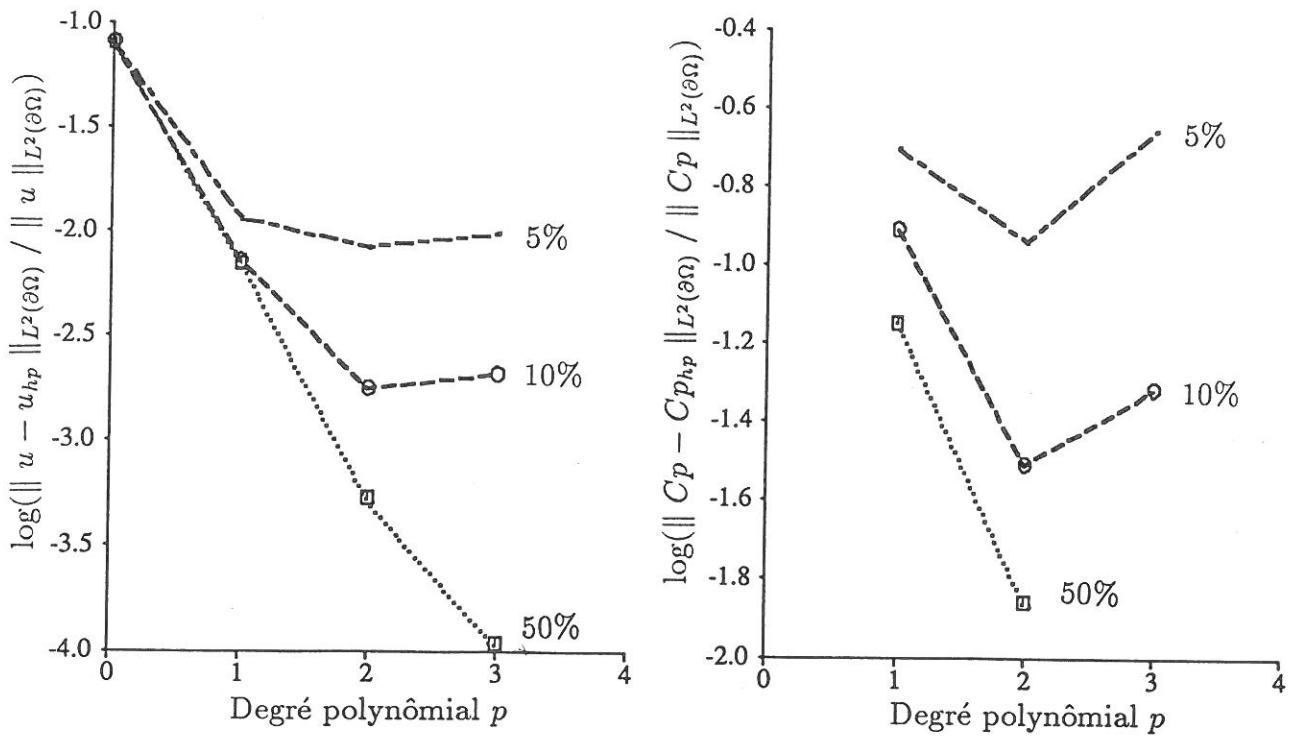


Fig. 5. — Erreur L^2 en fonction de la régularité du maillage.

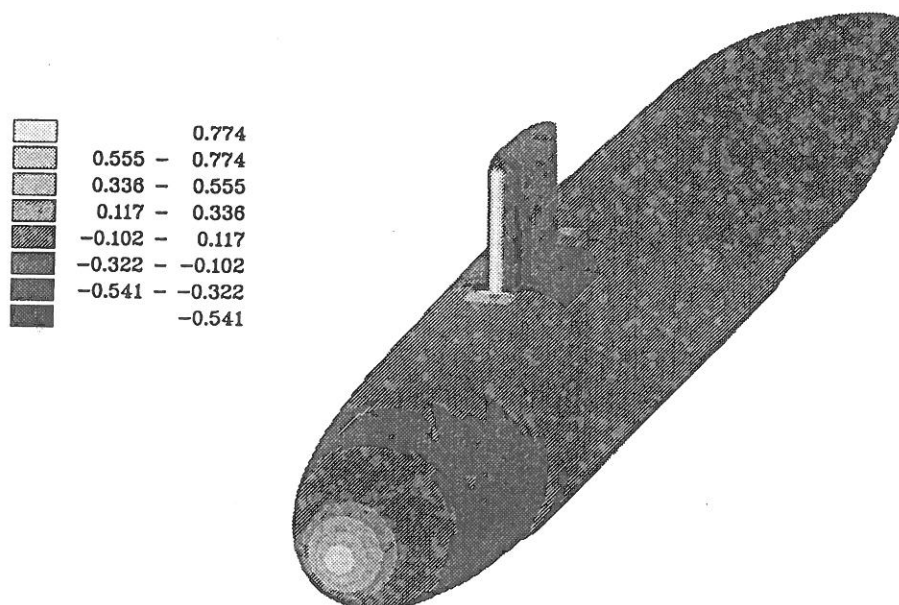


Fig. 6. — Distribution du coefficient de pression sur un sous-marin test.

la comparaison à nombre constant d'inconnues; c'est-à-dire à quantité de travail constant. La méthode des singularités classique est équivalente à la méthode $h-p$ avec $p=0$. Ainsi le cas $p=0$ avec 304 facettes correspond, à la courbure près des facettes, à la méthode des singularités avec 304 facettes. On vérifie sur la figure 4a que l'erreur L^2 sur le potentiel est de l'ordre de $7,4 \cdot 10^{-2}$. L'approximation à 456 inconnues qui correspond à 76 facettes et $p=2$ donne une erreur de l'ordre de $7,5 \cdot 10^{-4}$. En faisant l'hypothèse d'une évolution de l'erreur en $N^{-(p+1)/2}$ on peut estimer qu'une représentation à 51 facettes avec $p=2$ (306 inconnues) donnerait une erreur de l'ordre de $1,2 \cdot 10^{-3}$. Ainsi à quantité de travail constant, le gain de précision de la méthode $h-p$ par rapport à la méthode des singularités d'ordre zéro est très significatif.

VI.4. — INFLUENCE DE LA RÉGULARITÉ DU MAILLAGE

Pour un maillage et un nombre de facettes fixé, c'est-à-dire pour h à peu près constant, on étudie l'évolution de l'erreur dans $L^2(\partial\Omega)$ en fonction de l'aplatissement d'un ellipsoïde. Un maillage à 360 facettes a été créé pour l'ellipsoïde $a_1=0,5$, $a_2=0,25$, $a_3=0,25$. En appliquant à la géométrie une affinité dans la direction x_3 de rapport variable, on étudie l'influence du défaut de régularité du maillage sur la solution approchée.

Les calculs ont été réalisés dans les trois configurations : $a_3=0,25$, $a_3=0,05$ et $a_3=0,025$. Les aplatissements correspondant sont de 50, 10 et 5% respectivement. Il apparaît sur les figures 5a et b que

pour l'ellipsoïde aplati à 50%, l'erreur théorique est atteinte jusqu'à $p \leq 3$, alors que pour les deux autres ellipsoïdes elle n'est atteinte que pour $p \leq 2$ et $p \leq 1$ respectivement. Ces figures illustrent le fait que pour $p=3$ le maillage est régulier au sens de la condition (ii) uniquement pour le premier cas, il ne l'est plus suffisamment pour les deux autres cas. Dans le cas à 10% d'aplatissement, le maillage est régulier pour $p \leq 2$; dans le dernier cas (5%) le maillage est régulier pour $p \leq 1$. Pour satisfaire à nouveau la condition (ii) et retrouver ainsi une bonne convergence, il faut diminuer la taille des facettes dans la zone de très forte courbure.

VI.5. — UN EXEMPLE INDUSTRIEL

Afin d'illustrer complètement la présente méthode on montre une utilisation industrielle. Sur la figure 6 on a représenté la distribution du coefficient de pression sur un sous-marin test. La surface est constituée de 824 éléments courbes obtenus à partir d'une représentation CAO de $\partial\Omega$ (cf. Fig. 1). Aucune hypothèse de symétrie n'a été faite. Le calcul a été réalisé avec une approximation linéaire du potentiel, $p=1$. La construction de la matrice d'influence qui est d'ordre 2472×2472 demande une trentaine de minutes CPU sur un ordinateur Alliant FX80. La résolution par une méthode LU résidente sur le calculateur se fait en quelques secondes.

VII. — CONCLUSION

Nous avons présenté une méthode de Galerkin discontinue de type h - p pour déterminer l'écoulement potentiel autour d'un corps non portant. La prise en compte des éventuels effets portants est en cours d'implémentation; elle est basée sur l'approximation particulière des nappes de sillage [6].

La méthode et les quadratures qui ont été présentées sont tout à fait générales et pourraient très bien être utilisées pour résoudre des problèmes linéaires, en domaine borné ou non, dont on connaît une fonction de Green pseudo-homogène de degré-1. A titre d'exemple la présente méthode peut être appliquée à des problèmes d'élasticité linéaire, au problème de Helmholtz [4] ou bien aux écoulements de Stokes.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier A. Nedellec, du Bassin d'Essais des Carènes, pour nous avoir fait profiter de son expérience en CAO. J. L. G. tient à remercier P. Le Querré et O. Daube pour l'aide qu'ils ont apportée dans la correction du manuscrit. Le présent travail a été financé par la DRET; contrat 90 1047.

Manuscrit accepté le 12 avril 1991.

RÉFÉRENCES

- [1] BABUSKA I. et GUO B. Q., *The h - p version of the finite element method for domains with curved boundaries*. SIAM J. Numer. Anal., vol. 25, n° 4, (1988), p. 837-861.
- [2] CANTALOUBE B. et REHBACH C., *Calcul des intégrales de la méthode des singularités*. La Recherche Aérospatiale, vol. 1, (1986), p. 15-22.
- [3] CIARLET P. G. et RAVIART P. A., *Interpolation theory over curved elements, with applications to finite element methods*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 1, (1972), p. 217-249.
- [4] GIROIRE J., *Integral equation methods for the Helmholtz equation*. Integral Equations and Operator Theory, vol. 5, (1982), p. 506-517.
- [5] GUERMOND J. L., *Numerical calculation of layer potentials over curved domains in \mathbb{R}^3* . SIAM J. Numer. Anal., soumis pour évaluation.
- [6] HUBERSON S., *Calcul d'écoulement tridimensionnels incompressibles par une méthode particulière*. J. Méc. Théo. et Appli., vol. 3, n° 1, (1984), p. 805-819.
- [7] HESS J. L. et SMITH A. M. O., *Calculation of potential flow about arbitrary bodies*. Progress in Aeronautical Science Series, vol. 8, Pergamon Press, (1966).
- [8] JIN-TAE LEE, *A potential based panel method for the analysis of marine propellers in steady flow*. PhD. thesis, MIT, Boston, USA, (1987).
- [9] JOHNSON C. G. L. et SCOTT L. R., *An analysis of quadrature errors in second-kind boundary integral methods*. SIAM J., Numer. Anal., vol. 26, n° 6, (1989), p. 1356-1382.
- [10] JOHNSON F. T., *A general panel method for the analysis and design of arbitrary configuration in incompressible flows*. NASA report 3079, (1980).
- [11] KORBUT L. et MIKELIĆ A., *The potentiel integral for a polynomial distribution over a curved triangular domain*. Int. J. Numer. Methods. Eng., vol. 23, (1986), p. 2277-2285.
- [12] LAMB H., *Hydrodynamics*, Dover publications, New York, (1945).
- [13] LÉ T. H., MORCHOISNE Y. et RYAN J., *Techniques numériques nouvelles dans les méthodes de singularités pour l'application à des configurations tridimensionnelles complexes*. Applications of computational fluid dynamics in aeronautics, AGARD-CP-412, (1986).
- [14] NEDELEC J. C., *Approximation des équations intégrales en mécanique et en physique*, Cours de l'École d'été CEA-INRIA-EDF, (1977).
- [15] ROMATE J. E., *Local error analysis in 3-D panel methods*. J. Engin. Math., vol. 22, (1988), p. 123-142.
- [16] VERCHOTA G., *Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace's equation in Lipschitz domains*. J. Func. Anal., vol. 59, (1984), p. 572-611.