618

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 313, Série II, p. 1507-1512, 1991 

Méthodes numériques appliquées à la mécanique/*Computational Mechanics*
(Mécanique des fluides/*Fluid Mechanics*)

# Une formulation par matrice d'influence des équations de Navier-Stokes incompressibles en variables vitesse-tourbillon

Jean-Luc GUERMOND et Antoine SELLIER

***Résumé*** – Dans le cadre d'une formulation vitesse-tourbillon des équations de Navier-Stokes incompressibles en dimension 3 et en domaine éventuellement multiplement connexe, on propose une formulation par matrice d'influence permettant de découpler la résolution du champ de vorticité de celle du champ de vitesse.

## An influence matrix formulation of Navier-Stokes equations in velocity-vorticity formulation for incompressible flows

***Abstract*** – *Within the framework of a 3-dimensional velocity-vorticity formulation of Navier-Stokes equations for incompressible flows, an influence matrix formulation is proposed in order to uncouple the vorticity and the velocity problems. Multiply connected domains are considered.*

***Abridged English Version*** (Equation numbers refer to the French version) – Let $\Omega$ be an open connected domain in $\mathbb{R}^3$ whose boundary is smooth. Define

$$\mathbb{H}_1(\Omega) := \{\xi \in L^2(\Omega)^3,\ \nabla \times \xi = \mathbf{0},\ \nabla . \xi = \mathbf{0},\ \xi . \mathbf{n} = 0\}.$$

It can be shown that $\mathbb{H}_1(\Omega)$ is a finite dimensional vector space whose dimension, $p$, is equal to the number of cuts that have to be performed so that the domain is simply connected (*cf.* Dautry et Lions [3], p. 253]). If $\Omega$ is simply connected, $\mathbb{H}_1(\Omega)$ reduces to zero.

Consider an incompressible flow of a Newtonian fluid in $\Omega$. Even though Navier-Stokes equations are usually formulated in terms of velocity and pressure, they can also be equivalently formulated in terms of velocity and vorticity, *see* $(\mathscr{P})$ (*see* Daube *et al.* [2], Ruas [7]). The problem $(\mathscr{P})$ is difficult to solve, for there is a strong coupling between $\mathbf{u}$ and $\boldsymbol{\omega}$ and no boundary condition for $\boldsymbol{\omega}$. The objective of this Note is to present variational formulations which decouple the problems on $\boldsymbol{\omega}$ and $\mathbf{u}$ once $(\mathscr{P})$ has been linearized and discretized in time.

The convection-diffusion equation for the vorticity is usually discretized by an Adams-Bashforth-Crank-Nicolson scheme; as a result, the equation usually reduces to solving a Helmholtz equation, $H\boldsymbol{\omega} = S$, where $H = \sigma I_d - \nabla^2$, $\sigma = 2/\nu\Delta t$, $I_d$ is the identity, and the non-linear terms have been made explicit in the source term S. The condition $\partial \mathbf{u}/\partial t - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} - f \in \mathbb{H}_1(\Omega)^{\perp}$ is discretized in the same manner as above.

In order to simplify $(\mathscr{P})$, it is classical to introduce the decomposition $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ and $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ so that the couples $(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{u}_1)$ and $(\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{u}_2)$ are solutions to problems $(\mathscr{P}_1)$ and $(\mathscr{P}_2)$ respectively. Problem $(\mathscr{P}_1)$ consists of a Helmholtz and a Poisson problem with Dirichlet data. Recall that these problems can readily be solved numerically. Problem $(\mathscr{P}_2)$ is not as tractable as $(\mathscr{P}_1)$ for the vector fields $\mathbf{u}_2$ and $\boldsymbol{\omega}_2$ are strongly coupled. It is shown hereafter how the coupling conditions can be enforced through weak formulations on $\boldsymbol{\omega}_2$ only.

---

Note présentée par Évariste SANCHEZ-PALENCIA.

0764-4450/91/03131507 $ 2.00 

Define $H(\nabla^2, \Omega)$ the subset of functions $v$ in $H^1(\Omega)$ so that $\nabla^2 v$ is in $L^2(\Omega)$. If $\Omega$ is regular enough and if $\mathbf{v}$ is in $H(\nabla^2, \Omega)^3$, the boundary values of $\nabla.\mathbf{v}$ and $\nabla\times\mathbf{v}$ are in $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ and in $H^{-1/2}(\partial\Omega)^3$ respectively. Define $X(\Omega)$ and $Y(\Omega)$ the subsets of functions in $H(\nabla^2, \Omega)^3$ which satisfy the homogeneous Helmholtz or Laplace equation respectively, and whose tangential boundary value vanishes.

The function spaces $X(\Omega)$ and $Y(\Omega)$ are useful for translating into weak forms the boundary conditions that are imposed on $\nabla.\boldsymbol{\omega}_2$ and $\nabla.\mathbf{u}_2$. In other words, it can be shown that $\nabla.\boldsymbol{\omega}_2$ is equal to $-\nabla.\boldsymbol{\omega}_1$ in $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ if and only if the tangential boundary value of $\boldsymbol{\omega}_2$ satisfies the variational equality (3.1). Furthermore, the incompressibility of the velocity field is enforced if and only if $\boldsymbol{\omega}_2$ satisfies the variational equality (3.2). Note that the variational formulation is imposed on $\boldsymbol{\omega}_2$ only, the velocity field $\mathbf{u}_2$ is no longer directly involved. The present technique is similar to those which Glowinski & Pironneau [5] and Quartapelle et Valz-Gris [6] have developed.

Likewise, the two conditions induced by the multiple connectivity of $\Omega$ can be put into the variational forms (4.1) and (4.2).

It is hereafter shown how the weak formulations above yield an influence matrix formulation as described by Glowinski et Pironneau [5]. For this purpose, assume that the problem on $\boldsymbol{\omega}_2$ is well posed in a Hilbert space that is denoted by $W(\Omega)$; furthermore, assume that the tangential boundary value of $\boldsymbol{\omega}_2$ spans a Hilbert space that is denoted by $T(\partial\Omega)$ (*cf.* Ruas [7] for variational justifications). Let $(g_i)_{i\in I}$ be a Hilbertian basis of $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

The Hilbert spaces $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$, and $H^{1/2}(\partial\Omega)$ are isomorphic; let $(\boldsymbol{\mu}_i)_{i\in I}$ and $(\boldsymbol{\psi}_i)_{i\in I}$ be the Hilbertian basis of $X(\Omega)$ and $Y(\Omega)$ so that $\boldsymbol{\psi}_i = g_i\mathbf{n}$ on $\partial\Omega$ and $\boldsymbol{\mu}_i = g_i\mathbf{n}$ on $\partial\Omega$. Let $(\mathbf{t}_j)_{j\in J}$ be a Hilbertian basis of $T(\partial\Omega)$, and consider $(\boldsymbol{\omega}_j)_{j\in I}$ the Hilbertian basis of $W(\Omega)$ so that $\boldsymbol{\omega}_j = \mathbf{t}_j$ on $\partial\Omega$. Then $\boldsymbol{\omega}_2$ can be decomposed into $\boldsymbol{\omega}_2 = \sum_{j\in J} \lambda_2^j \boldsymbol{\omega}_j$, where unknowns $(\lambda_2^j)$ are solutions to an inifinite linear system $A\lambda_2 = B$, where the coefficients of the matrix A and the vector B do not depend on the time and are given by (5.1), (5.2), (5.3) and (5.4). A is the influence matrix of $(\mathscr{P}_2)$.

Consider a triangulation of $\Omega$ with N nodes and let $A_h$ be a finite element approximation of A. The matrix $A_h$ is not symmetric, and of the order $\mathcal{O}(N^{2/3})$. A direct solution of $A_h\lambda_2^h = B_h$ would require at least $\mathcal{O}(N^{4/3})$ operations, whereas solving of Helmholtz and Dirichlet problems by means of a multigrid method would need only $\mathcal{O}(N)$ operations. Hence, the linear system $A_h\lambda_2^h = B_h$ should be solved iteratively. As a consequence, it is not necessary to calculate the coefficients of $A_h$; however, the present formulation is useful for evaluating a preconditioner of $A_h$.

---

1. Introduction. — Soit $\Omega$ un ouvert borné régulier et connexe de $\mathbb{R}^3$. Afin de caractériser la multiple connexité éventuelle de $\Omega$ on considère l'espace

$$\mathbb{H}_1(\Omega) := \{\boldsymbol{\xi}\in L^2(\Omega)^3,\ \nabla\times\boldsymbol{\xi}=0,\ \nabla.\boldsymbol{\xi}=0,\ \boldsymbol{\xi}.\mathbf{n}=0\}$$

dont la dimension, $p$, est finie et égale au nombre de coupures à effectuer pour rendre le domaine simplement connexe (*cf.* Dautray et Lions [3], p. 253]). $\Omega$ est simplement connexe si et seulement si $p$ est nul.

On considère l'écoulement incompressible d'un fluide newtonien soumis à une force massique $\mathbf{f}$ et occupant le domaine $\Omega$. Les équations de Navier-Stokes, écrites habituellement en variables primitives vitesse-pression, peuvent également se formuler en variables



vitesse-tourbillon (*cf.* Daube et coll. [2], Ruas [7]) :

$$(1.1)\quad (\mathscr{P})\begin{cases} \dfrac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} = -\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}-\mathbf{f}) \\ \nabla^2\mathbf{u} = -\nabla\times\boldsymbol{\omega} \\ \nabla.\boldsymbol{\omega}=0,\quad \nabla.\mathbf{u}=0,\quad \mathbf{u}=\mathbf{u}_b \quad\text{et}\quad \boldsymbol{\omega}.\mathbf{n}=(\nabla\times\mathbf{u}).\mathbf{n} \ \text{sur}\ \partial\Omega \\ \dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} - \nu\nabla^2\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u} - \mathbf{f} \in \mathbb{H}_1(\Omega)^\perp, \\ \boldsymbol{\omega} - \nabla\times\mathbf{u} \in \mathbb{H}_1(\Omega)^\perp, \\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{x}) \quad\text{et}\quad \nabla.\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

où l'orthogonal de $\mathbb{H}_1(\Omega)$ est pris dans $L^2(\Omega)^3$. Rappelons que l'un des avantages de la formulation vitesse-tourbillon est d'être identique en repère galiléen et en repère non inertiel. Dans ce dernier cas les effets de rotation sont pris en compte par les conditions aux limites. D'autre part l'utilisation du tourbillon comme inconnue semble adaptée aux conditions aux limites ouvertes pour les écoulements en domaines non bornés.

Sous la forme (1.1) le problème $(\mathscr{P})$ reste difficile à résoudre à cause du couplage important entre $\mathbf{u}$ et $\boldsymbol{\omega}$ et l'absence de conditions aux limites pour $\boldsymbol{\omega}$. Après avoir linéarisé et discrétisé en temps le problème, on présente des formulations variationnelles qui découplent la résolution du champ de vorticité de celle du champ de vitesse et conduisent à une formulation par matrice d'influence numériquement agréable.

2. Décomposition du problème. — Afin de discrétiser en temps l'équation de transport diffusion de la vorticité, on approche l'opérateur de la chaleur à l'aide d'un schéma de Crank-Nicolson et le terme source à l'aide d'un schéma d'Adams-Bashforth. Ainsi à chaque pas de temps le tourbillon est solution d'une équation de Helmholtz $H\boldsymbol{\omega} = S$, où $H = \sigma I_d - \nabla^2$, $\sigma = 2/\nu\Delta t$, $I_d$ est l'opérateur identité et les termes non linéaires ont été explicités dans le terme source S. De même on approche la condition d'appartenance de $\partial\mathbf{u}/\partial t - \nu\nabla^2\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u} - \mathbf{f}$ à $\mathbb{H}_1(\Omega)^\perp$ par $H\mathbf{u}\in\{S' + \mathbb{H}_1(\Omega)^\perp\}$ où S' contient les termes non linéaires explicités.

Afin de simplifier la résolution de $(\mathscr{P})$ il est classique d'introduire la décomposition $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ et $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ telle que les couples $(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{u}_1)$ et $(\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{u}_2)$ vérifient :

$$(2.1)\quad (\mathscr{P}_1)\begin{cases} H\boldsymbol{\omega}_1 = S \\ \boldsymbol{\omega}_1 = \nabla_T\times\boldsymbol{\pi}_T(\mathbf{u}_b) \quad \text{sur}\ \partial\Omega \\ \nabla^2\mathbf{u}_1 = -\nabla\times\boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_b \quad \text{sur}\ \partial\Omega \end{cases}$$

$$(2.2)\quad (\mathscr{P}_2)\begin{cases} H\boldsymbol{\omega}_2 = 0 \\ \boldsymbol{\omega}_2.\mathbf{n}=0,\quad \nabla.\boldsymbol{\omega}_2 = -\nabla.\boldsymbol{\omega}_1 \quad\text{et}\quad \nabla.\mathbf{u}_2 = -\nabla.\mathbf{u}_1 \ \text{sur}\ \partial\Omega \\ H\mathbf{u}_2 \in \{S' - H\mathbf{u}_1 + \mathbb{H}_1(\Omega)^\perp\} \\ \boldsymbol{\omega}_2 - \nabla\times\mathbf{u}_2 \in \{-\boldsymbol{\omega}_1 + \nabla\times\mathbf{u}_1 + \mathbb{H}_1(\Omega)^\perp\} \\ \nabla^2\mathbf{u}_2 = -\nabla\times\boldsymbol{\omega}_2 \\ \mathbf{u}_2 = 0 \quad \text{sur}\ \partial\Omega \end{cases}$$

Les notations $\nabla_T$ et $\boldsymbol{\pi}_T$ désignent respectivement les opérateurs de différentiation et de projection sur le plan tangent de $\partial\Omega$. Le problème $(\mathscr{P}_1)$ consiste à résoudre d'abord une équation de Helmholtz avec condition de Dirichlet pour $\boldsymbol{\omega}_1$, puis une équation de Poisson avec condition de Dirichlet pour $\mathbf{u}_1$. Ces deux problèmes sont classiques et faciles à résoudre numériquement. Par contre, pour le problème $(\mathscr{P}_2)$ les champs $\boldsymbol{\omega}_2$ et $\mathbf{u}_2$ sont couplés *via* la condition d'incompressibilité du champ de vitesse et les deux conditions induites par la connexité multiple du domaine. Par la suite on ramène les relations de couplage à des formulations faibles portant uniquement sur $\boldsymbol{\omega}_2$.

3. Formulations faibles de l'incompressibilité. — Soit $H(\nabla^2, \Omega)$ le sous-espace de $H^1(\Omega)$ des fonctions dont le laplacien est de carré sommable sur $\Omega$. Pour que la trace de la divergence et du rotationnel d'un champ de vecteurs $\mathbf{v}$ soient définis dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ et dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)^3$ respectivement, il suffit que $\mathbf{v}$ soit dans $H(\nabla^2, \Omega)^3$ dès que $\Omega$ est suffisamment régulier (*cf.* Girault et Raviart [4], p. 17-21]). Soient $H^1_{n0}(\Omega)^3$ et $H^1_{t0}(\Omega)^3$ respectivement les sous-espaces de fonctions de $H^1(\Omega)^3$ dont la trace normale et la trace tangentielle sont respectivement nulles sur $\partial\Omega$. Définissons de plus $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ les sous-espaces de $H_{t0}(\nabla^2, \Omega)^3$ tels que :

$$X(\Omega) := \{\boldsymbol{\mu} \in H^1_{t0}(\Omega)^3 : H\boldsymbol{\mu} = 0\}, \qquad \text{et} \qquad Y(\Omega) := \{\boldsymbol{\psi} \in H^1_{t0}(\Omega)^3 : \nabla^2\boldsymbol{\psi} = 0\}.$$

En désignant par $\langle , \rangle$ la dualité entre $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ et $H^{1/2}(\partial\Omega)$, le caractère solenoïdal de la vorticité se traduit alors sous la forme variationnelle suivante :

Proposition 3.1. — *Soit* $\boldsymbol{\omega}_2$ *dans* $H_{n0}(\nabla^2, \Omega)^3$ *tel que* $H\boldsymbol{\omega}_2 = 0$. *Supposons que* $\nabla.\boldsymbol{\omega}_1 \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, *alors* $\nabla.\boldsymbol{\omega}_2 = -\nabla.\boldsymbol{\omega}_1$ *dans* $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ *si et seulement si :*

$$\forall \boldsymbol{\mu} \in X(\Omega), \quad \langle \nabla \times \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{n} \rangle = \langle \nabla.\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\mu}.\mathbf{n} \rangle. \tag{3.1}$$

De même, une formulation variationnelle associée à l'incompressibilité du champ de vitesse est donnée par :

Proposition 3.2. — *Soit* $(\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{u}_2) \in H(\mathrm{rot}, \Omega) \times H_0(\nabla^2, \Omega)^3$ *et* $\mathbf{u}_1 \in H(\nabla^2, \Omega)^3$ *tels que* $\nabla^2\mathbf{u}_2 = -\nabla \times \boldsymbol{\omega}_2$, *alors* $\nabla.\mathbf{u}_2$ *est égal à* $-\nabla.\mathbf{u}_1$ *dans* $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ *si et seulement si :*

$$\forall \boldsymbol{\psi} \in Y(\Omega), \quad \int_\Omega \boldsymbol{\omega}_2.\nabla \times \boldsymbol{\psi} = \langle \nabla.\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\psi}.\mathbf{n} \rangle. \tag{3.2}$$

La démonstration de ces propositions repose sur l'utilisation des formules de Green du laplacien vectoriel et du rotationnel, et le fait que la trace normale est un isomorphisme de $X(\Omega)$ sur $H^{1/2}(\Omega)$ et de $Y(\Omega)$ sur $H^{1/2}(\Omega)$.

La formulation faible (3.2) permet de reporter sur le champ de vorticité $\boldsymbol{\omega}$ la condition de frontière imposée sur $\nabla.\mathbf{u}_2$. Cette formulation s'apparente aux techniques de transfert de conditions aux limites développées par Glowinski et Pironneau [5] et Quartapelle et Valz-Gris [6]. Noter que les formulations faibles (3.1) et (3.2) demandent moins de régularité que les formulations fortes associées. On a introduit les espaces de fonctions à laplacien de carré sommable uniquement pour donner des interprétations fortes aux formulations faibles (3.1) et (3.2) (*cf.* Ruas [7] pour un cadre variationnel optimal pour $\boldsymbol{\omega}$).

4. Formulations faibles de la connexité multiple. — Lorsque $\Omega$ est multiplement connexe les champs $\boldsymbol{\omega}_2$ et $\mathbf{u}_2$ sont couplés par les deux conditions suivantes :

$$\boldsymbol{\omega}_2 - \nabla \times \mathbf{u}_2 \in \{-\boldsymbol{\omega}_1 + \nabla \times \mathbf{u}_1 + \mathbb{H}_1(\Omega)^\perp\} \qquad \text{et} \qquad H\mathbf{u}_2 \in \{S' - H\mathbf{u}_1 + \mathbb{H}_1(\Omega)^\perp\}.$$

La première condition de couplage s'écrit sous la forme variationnelle :

Proposition 4.3. — *Soient* $(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \in L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3$ *et* $\mathbf{u} \in H(\mathrm{rot}, \Omega)$. *Soit* $\mathbf{u}_b \times \mathbf{n}$ *la trace tangente de* $\mathbf{u}$ *sur* $\partial\Omega$, *alors* $\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 - \nabla \times \mathbf{u}$ *est dans* $\mathbb{H}_1(\Omega)^\perp$ *si et seulement si :*

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{H}_1(\Omega), \quad \int_\Omega \boldsymbol{\omega}_2.\boldsymbol{\xi} = -\int_\Omega \boldsymbol{\omega}_1.\boldsymbol{\xi} - \langle \mathbf{u}_b \times \mathbf{n}, \boldsymbol{\xi} \rangle. \tag{4.1}$$



Afin de transférer sur $\boldsymbol{\omega}_2$ la condition de connexité multiple portant sur $H\mathbf{u}_2$, on introduit l'espace de fonctions $\mathbb{F}_1(\Omega) := \{\boldsymbol{\varphi} \in H^1_0(\Omega)^3 : \exists \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{H}_1(\Omega), \nabla^2\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\xi}\}$. Les espaces $\mathbb{F}_1(\Omega)$ et $\mathbb{H}_1(\Omega)$ étant isomorphes, on peut alors énoncer :

Proposition 4.4. — *Soient* $(\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\omega}_2) \in H_0(\nabla^2, \Omega)^3 \times H(\mathrm{rot}, \Omega)$ *tels que* $\nabla^2\mathbf{u}_2 = -\nabla \times \boldsymbol{\omega}_2$ *alors* $H\mathbf{u}_2$ *est dans* $\{S' - H\mathbf{u}_1 + \mathbb{H}_1(\Omega)^\perp\}$, *si et seulement si :*

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{F}_1(\Omega), \quad -\sigma\int_\Omega \boldsymbol{\omega}_2.\nabla \times \boldsymbol{\varphi} - \langle \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{n}, \boldsymbol{\xi} \rangle = \int_\Omega (S' - H\mathbf{u}_1).\boldsymbol{\xi}. \tag{4.2}$$

Ainsi, à l'aide des formulations (3.2), (4.1) et (4.2) on a transféré sur le champ $\boldsymbol{\omega}_2$ toutes les conditions aux limites ou de connexité multiple qui portaient sur $\mathbf{u}_2$. Le problème portant sur $\boldsymbol{\omega}_2$ est ainsi découplé de celui portant sur $\mathbf{u}_2$.

On montre maintenant comment les formulations faibles proposées se ramènent à la technique de matrice d'influence introduite par Glowinski et Pironneau [5].

5. Formulation par matrice d'influence. — On suppose par la suite que les traces de $\nabla.\boldsymbol{\omega}_1$ et $\nabla.\mathbf{u}_1$ sont bien définies dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ et on admet que le problème sur $\boldsymbol{\omega}_2$ est bien posé dans un espace de Hilbert qu'on note $W(\Omega)$. On suppose aussi que la trace tangentielle réalise un isomorphisme de $W(\Omega)$ sur un espace de Hilbert qu'on note $T(\partial\Omega)$ (*cf.* Ruas [7] pour une justification variationnelle).

Soit $(g_i)_{i \in I}$ une base hilbertienne de $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Les espaces de Hilbert $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ étant isomorphes à $H^{1/2}(\partial\Omega)$, on peut alors définir les bases hilbertiennes $(\boldsymbol{\mu}_i)_{i \in I}$ et $(\boldsymbol{\psi}_i)_{i \in I}$, telles que $\boldsymbol{\mu}_i = g_i\mathbf{n}$ sur $\partial\Omega$ et $\boldsymbol{\psi}_i = g_i\mathbf{n}$ sur $\partial\Omega$. Soit $(\mathbf{t}_j)_{j \in J}$ une base hilbertienne de $T(\partial\Omega)$, on définit $(\boldsymbol{\omega}_j)_{j \in J}$ la base hilbertienne de $W(\Omega)$ telle que $\boldsymbol{\omega}_j = \mathbf{t}_j$ sur $\partial\Omega$. Le champ $\boldsymbol{\omega}_2$ se met sous la forme $\sum_{j \in J} \lambda^j_2 \boldsymbol{\omega}_j$, où les coefficients $(\lambda^j_2)$ sont tels que l'incompressibilité de la vitesse, la solénoïdalité de la vorticité et les éventuelles conditions de connexité multiple sont assurées.

Le caractère solénoïdal de la vorticité (3.1) se traduit par :

$$\forall i \in I, \quad \sum_{j \in J} \lambda^j_2 \langle \nabla \times \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{t}_j \times \mathbf{n} \rangle = \langle \nabla.\boldsymbol{\omega}_1, g_i \rangle. \tag{5.1}$$

La condition d'incompressibilité du champ de vitesse (3.2) s'écrit :

$$\forall i \in I, \quad \sum_{j \in J} \lambda^j_2 \int_\Omega \boldsymbol{\omega}_j.(\nabla \times \boldsymbol{\psi}_i) = \langle \nabla.\mathbf{u}_1, g_i \rangle. \tag{5.2}$$

Soit $(\boldsymbol{\xi}_l)_{l \in \{1, \ldots, p\}}$ et $(\boldsymbol{\varphi}_l)_{l \in \{1, \ldots, p\}}$ respectivement des bases de $\mathbb{H}_1(\Omega)$ et $\mathbb{F}_1(\Omega)$, les conditions (4.1) et (4.2) s'écrivent alors :

$$\forall l \in [1, \ldots, p], \quad \sum_{j \in J} \lambda^j_2 \int_\Omega \boldsymbol{\omega}_j.\boldsymbol{\xi}_l = \int_\Omega \boldsymbol{\omega}_1.\boldsymbol{\xi}_l - \langle \mathbf{u}_b \times \mathbf{n}, \boldsymbol{\xi}_l \rangle, \tag{5.3}$$

$$\forall l \in [1, \ldots, p], \quad \sum_{j \in J} \lambda^j_2 \left[ -\sigma\int_\Omega \boldsymbol{\omega}_j.\nabla \times \boldsymbol{\varphi}_l - \langle \mathbf{t}_j \times \mathbf{n}, \boldsymbol{\xi}_l \rangle \right] = \int_\Omega (S' - H\mathbf{u}_1).\boldsymbol{\xi}_l. \tag{5.4}$$

La résolution du problème sur $\boldsymbol{\omega}_2$ se ramène à un système linéaire infini : $A\lambda_2 = B$, où les coefficients de la matrice A et du vecteur B sont indépendants du temps et sont définis par les relations précédentes. A est la matrice d'influence du problème $(\mathscr{P}_2)$.

Considérons une triangulation de $\Omega$ à N nœuds. Soit $A_h$ une approximation par éléments finis de A. La matrice $A_h$ est non symétrique et de rang $\mathcal{O}(N^{2/3})$. La résolution directe de $A_h\lambda^h_2 = B_h$ nécessite au moins, après une éventuelle factorisation LU, une descente-remontée qui coûte $\mathcal{O}(N^{4/3})$ opérations. Ce nombre est bien supérieur aux $\mathcal{O}(N)$

opérations nécessaires pour résoudre un problème de Helmholtz ou de Poisson dans $\Omega$ par une méthode multigrille. Ainsi la résolution itérative de $A_h \lambda_2^h = B_h$ s'impose. En conséquence il n'est pas nécessaire de calculer les coefficients de $A_h$, tout au plus doit-on en évaluer un préconditionnement.

La résolution numérique de la formulation vitesse-tourbillon en dimension 2 par une technique de matrice d'influence a été traitée par Daube [1].

Note remise le 26 juin 1991, acceptée après révision le 25 octobre 1991.

## Références bibliographiques

[1] O. Daube, Resolution of the 2D Navier-Stokes equations in velocity-vorticity form by means of an influence matrix technique, *J. Comput. Phys.*, 1991 (à paraître).

[2] O. Daube, J.-L. Guermond et A. Sellier, Sur la formulation vitesse-tourbillon des équations de Navier-Stokes en écoulement incompressible, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 313, série II, 1991, p. 377-382.

[3] R. Dautray et J.-L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, 1985, II.

[4] V. Girault et P.-A. Raviart, Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations, *Lecture Notes in Math.*, 749, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[5] R. Glowinski et O. Pironneau, Numerical methods for the first biharmonic equation and for the two-dimensional Stokes problem, *S.I.A.M. Review*, 21, 2, 1979, p. 167-212.

[6] L. Quartapelle et F. Valz-Gris, Projection conditions on the vorticity in viscous incompressible flow, *Int. J. numer. methods fluids*, 1, 1981, p. 129-144.

[7] V. Ruas, Une formulation vitesse-tourbillon des équations de Navier-Stokes incompressibles tridimensionnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 313, série I, 1991, p. 639-644.

J.-L. G. : *L.I.M.S.I.-C.N.R.S.*, B. P. n° 133, 91403 *Orsay Cedex;*

A. S. : *LADHYX*, *École polytechnique*, 91128 *Palaiseau Cedex*.