C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série I, p. 1329-1332, 1997
Analyse numérique/*Numerical Analysis*

Un résultat de convergence d'ordre deux pour l'approximation des équations de Navier-Stokes par projection incrémentale

Jean-Luc GUERMOND

LIMSI, B.P. 133, 91403 Orsay cedex.

Résumé. On propose une méthode de projection incrémentale pour approcher les équations de Navier-Stokes. On montre que l'erreur est d'ordre $\mathcal{O}(\delta t^2 + h^{\ell+1})$ sur la vitesse dans la norme semi-discrète $\mathrm{l}^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)$ (discrète en temps, continue en espace), où $\ell \geq 1$ est le degré polynomial d'approximation de la vitesse.

A convergence result for the approximation of the Navier-Stokes equations by an incremental projection method

Abstract. *An incremental projection method is proposed to approximate the Navier-Stokes equations. The error on the velocity in the semi-discrete norm $\mathrm{l}^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)$ is shown to be $\mathcal{O}(\delta t^2 + h^{\ell+1})$, where $\ell \geq 1$ is the polynomial degree of the velocity approximation. It is also shown that the splitting error of the projection schemes that are based on the incremental pressure correction is $\mathcal{O}(\delta t^2)$; this result holds even if the approximation of the time derivative of the velocity is $\mathcal{O}(\delta t)$.*

1. Introduction

La méthode de projection, introduite par Chorin (*voir* [1]) et Temam (*voir* [6]), est très utilisée pour approcher en temps les équations de Navier-Stokes. Elle est basée sur une marche en temps fractionnaire qui sépare le problème de convection-diffusion de la contrainte d'incompressibilité. À chaque pas de temps, la vitesse déduite du sous-pas de convection-diffusion est projetée sur l'espace des champs de vecteurs solénoïdaux à trace normale nulle. Une analyse de convergence en temps de l'algorithme original a été faite par Rannacher dans [5]. De nombreuses variantes ont été proposées pour en améliorer l'ordre de convergence. Une variante introduite par Goda dans [2] consiste à expliciter la pression à l'étape de convection-diffusion puis à la corriger à l'étape de projection. Ce schéma a été analysé formellement par Van Kan (*voir* [7]) dans le cadre d'une approximation MAC. Toutefois, il n'existe pas d'analyse de convergence complète. Dans cette Note, on propose et on analyse un schéma de projection incrémental basé sur une approximation par différentiation rétrograde d'ordre deux pour la dérivée en temps et une technique de Galerkin pour l'approximation en espace.

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

2. Le schéma de projection incrémental

Soit Ω un ouvert borné connexe régulier de $\mathbb{R}^d$ ($d \leq 3$), rempli d'un fluide visqueux incompressible. On supose que la vitesse u (resp. la pression p) est une fonction régulière du temps dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)^d$ (resp. $\mathrm{L}^2_0(\Omega)$). Le couple (u, p) satisfait : $u_{|t=0} = u_0$, où $u_0 \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)^d$ est solénoïdal et

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}, v\right) + (\nabla u, \nabla v) + (u \cdot \nabla u, v) - (\nabla \cdot v, p) = (f, v), & \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)^d,\ \forall t \in (0, T), \\ (\nabla \cdot u, q) = 0, & \forall q \in \mathrm{L}^2_0(\Omega), \forall t \in (0, T), \end{cases}$$

où $(\cdot, \cdot)$ désigne indistinctement le produit scalaire de $\mathrm{L}^2(\Omega)^d$ ou bien celui de $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Les données u_0 et f sont des fonctions régulières.

Pour construire une approximation de Galerkin, on introduit $X_h \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)^d$ et $M_h \in \mathrm{L}^2_0(\Omega)$. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 1$, et $c > 0$ tels que pour tout $r \in [1, \ell]$ et tout $v \in \mathrm{H}^{r+1}(\Omega)^d \cap \mathrm{H}^1_0(\Omega)^d$, $\inf_{v_h \in X_h} \|v - v_h\|_0 + h\|v - v_h\|_1 \leq ch^{r+1}\|v\|_{r+1}$; et pour tout $q \in \mathrm{H}^r(\Omega) \cap \mathrm{L}^2_0(\Omega)$, $\inf_{q_h \in M_h} \|q - q_h\|_0 \leq ch^r\|q\|_r$. On suppose aussi qu'on a les inégalités inverses : $\exists c > 0$, $\forall v_h \in X_h$, $\|v_h\|_{n,p} \leq ch^{m-n+\frac{d}{p}-\frac{d}{q}}\|v_h\|_{m,q}$, pour $0 \leq m \leq n \leq 1$ et $1 \leq q \leq p \leq \infty$, et $\|v_h\|_{0,\infty} \leq c(1 + |\log h^{-1}|)^{1/2}\|v_h\|_{1,2}$ en dimension 2, ou $\|v_h\|_{0,\infty} \leq ch^{-1/2}\|v_h\|_{1,2}$ en dimension 3.

On introduit la divergence discrète $B_h \in \mathcal{L}(X_h, M_h)$ telle que $\forall (v_h, q_h) \in X_h \times M_h$, $(B_h v_h, q_h) = (v_h, B_h^{\mathrm{t}} q_h) = -(\nabla \cdot v_h, q_h)$. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $\inf_{q_h \in M_h} \sup_{v_h \in X_h} (v_h, B_h^{\mathrm{t}} q_h)/(\|v_h\|_1 \|q_h\|_0) \geq c$. Pour découpler la contrainte d'incompressibilité, on introduit un prolongement de B_h. On se donne $Y_h \subset \mathrm{L}^2(\Omega)^d$ avec $X_h \subset Y_h$ et on suppose qu'on dispose de $C_h \in \mathcal{L}(Y_h, M_h)$, un prolongement de B_h, qui vérifie la propriété de stabilité : si $q_h \in M_h$ et $q \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ sont tels que $\|q - q_h\|_0 \leq c_0 h\|q\|_1$, alors il existe $c(c_0) > 0$ tel que $\|C_h^{\mathrm{t}} q_h\|_0 \leq c(c_0)\|q\|_1$. Plusieurs choix sont possibles pour Y_h, les deux choix extrêmes étant $Y_h = X_h$ ou bien $Y_h = X_h + \nabla M_h$, en supposant $M_h \subset \mathrm{H}^1(\Omega)$. Dans le second cas on vérifie que C_h défini par $(C_h v_h, q_h) = (v_h, \nabla q_h)$ a les propriétés requises (*voir* [3] pour une revue des possibilités pour le choix de Y_h).

Pour un entier $K \geq 2$, on définit $\delta t = T/K$ et on introduit $t^0, t^1, \ldots, t^K$, une partition de $[0, T]$, telle que $t^k = k\,\delta t$ pour $0 \leq k \leq K$. Soit $(w_h(t), q_h(t)) \in (\ker B_h) \times M_h$ une approximation optimale de $(u(t), p(t))$. On propose l'algorithme suivant : pour $k = 0, 1$, poser $u_h^k = \tilde{u}_h^k = w_h(t^k)$, et pour $k = 1$, poser $p_h^1 = q_h(\delta t)$; pour $1 \leq k \leq K - 1$, chercher $\tilde{u}_h^{k+1} \in X_h$ tel que :

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} \frac{3(\tilde{u}_h^{k+1}, v_h) - 4(u_h^k, v_h) + (u_h^{k-1}, v_h)}{2\delta t} &+ (\nabla \tilde{u}_h^{k+1}, \nabla v_h) + d(2\tilde{u}_h^k - \tilde{u}_h^{k-1}, \tilde{u}_h^{k+1}, v_h) \\ &= (f^{k+1}, v_h) - (B_h^{\mathrm{t}} p_h^k, v_h), \qquad \forall v_h \in X_h, \end{aligned}$$

où $d(u, v, w) := ((u \cdot \nabla)v, w) + \frac{1}{2}(\nabla \cdot u, v \cdot w)$, cette forme coïncide avec $(u \cdot \nabla v, w)$ lorsque u est à divergence nulle. Ensuite, chercher $u_h^{k+1} \in Y_h$ et $p_h^{k+1} \in M_h$ tels que :

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \dfrac{3u_h^{k+1} - 3\tilde{u}_h^{k+1}}{2\delta t} + C_h^{\mathrm{t}}(p_h^{k+1} - p_h^k) = 0, \\ C_h u_h^{k+1} = 0. \end{cases}$$

Remarque 2.1. – En pratique, u_h^k et u_h^{k-1} sont éliminés de (2.2) en utilisant (2.3) en t^k et t^{k-1} et en utilisant le fait que C_h prolonge B_h. Pour $k \geq 3$, (2.2) s'écrit : $\forall v_h \in X_h$,

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{3\tilde{u}_h^{k+1} - 4\tilde{u}_h^k + \tilde{u}_h^{k-1}}{2\delta t}, v_h\right) &+ (\nabla \tilde{u}_h^{k+1}, \nabla v_h) + d(2\tilde{u}_h^k - \tilde{u}_h^{k-1}, \tilde{u}_h^{k+1}, v_h) \\ &- \frac{1}{3}(7p_h^k - 5p_h^{k-1} + p_h^{k-2}, \nabla \cdot v_h) = (f^{k+1}, v_h), \end{aligned}$$

et l'étape de projection se réduit à la détermination de la pression en résolvant :

$$C_h C_h^{\mathrm{t}}(p_h^{k+1} - p_h^k) = \frac{3B_h \tilde{u}_h^{k+1}}{2\delta t}. \tag{2.5}$$

Remarquer que dans (2.4), le terme $(7p_h^k - 5p_h^{k-1} + p_h^{k-2})/3$ peut s'écrire $2p_h^k - p_h^{k-1} + (p_h^k - 2p_h^{k-1} + p_h^{k-2})/3$; c'est formellement une extrapolation d'ordre deux.

Remarque 2.2. – Si on choisit $M_h \subset \mathrm{H}^1(\Omega)$ et $Y_h = X_h + \nabla M_h$, alors C_h^{t} est la restriction de ∇ à M_h (*voir* [3] et [4]) et (2.5) se réduit à : trouver $p_h^{k+1} \in M_h$ tel que :

$$\forall q_h \in M_h, \quad (\nabla(p_h^{k+1} - p_h^k), \nabla q_h) = -\frac{3(\nabla \cdot \tilde{u}_h^{k+1}, q_h)}{2\delta t}. \tag{2.6}$$

3. Les estimations d'erreur

À l'ordre un on a :

Théorème 3.1. – *Si* $u \in \mathrm{W}^{1,\infty}(0,T;\mathrm{H}_0^1(\Omega)^d \cap \mathrm{H}^{l+1}(\Omega)^d) \cap \mathrm{H}^2(0,T;\mathrm{H}^1(\Omega)^d)$ *et* $p \in \mathrm{W}^{1,\infty}(0,T;\mathrm{H}^l(\Omega)) \cap \mathrm{H}^2(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega))$, *la solution de* (2.2)-(2.3) satisfait :

$$\|u - u_h\|_{\mathrm{l}^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} + \|u - \tilde{u}_h\|_{\mathrm{l}^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} \le c(h^{\ell+1} + \delta t). \tag{3.1}$$

Théorème 3.2. – *Si* $u \in \mathrm{W}^{2,\infty}(0,T;\mathrm{H}_0^1(\Omega)^d \cap \mathrm{H}^{l+1}(\Omega)^d) \cap \mathrm{H}^3(0,T;\mathrm{H}^1(\Omega)^d)$ *et* $p \in \mathrm{W}^{2,\infty}(0,T;\mathrm{H}^l(\Omega)) \cap \mathrm{H}^3(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega))$, *il existe* $c_s > 0$ *et* $h_s > 0$, *tels que pour* h *dans* $]0,h_s]$ *et* $\delta t \le c_s/(1 + |\log h^{-1}|)^{1/2}$ *en dimension* 2 *ou* $\delta t \le c_s h^{1/2}$ *en dimension* 3, *on a :*

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{\mathrm{l}^\infty(\mathrm{H}^1(\Omega)^d)} + \|p - p_h\|_{\mathrm{l}^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega))} \le c(h^\ell + \delta t). \tag{3.2}$$

Le résultat essentiel de cette Note concerne l'ordre deux :

Théorème 3.3. – *Avec les hypothèses et les restrictions sur* δt *et* h *du théorème* 3.2, *la solution de* (2.2)-(2.3) vérifie :

$$\|u - u_h\|_{\mathrm{l}^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} + \|u - \tilde{u}_h\|_{\mathrm{l}^2(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} \le c(\delta t^2 + h^{\ell+1}). \tag{3.3}$$

On a des estimations en norme $\mathrm{l}^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)$ en supposant plus de régularité.

Théorème 3.4. – *Si* $u \in \mathrm{W}^{3,\infty}(0,T;\mathrm{H}_0^1(\Omega)^d \cap \mathrm{H}^{l+1}(\Omega)^d) \cap \mathrm{H}^4(0,T;\mathrm{H}^1(\Omega)^d)$ *et* $p \in \mathrm{W}^{2,\infty}(0,T;\mathrm{H}^l(\Omega)) \cap \mathrm{H}^4(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega))$, *avec les restrictions sur* δt *et* h *du théorème* 3.2, *on a :*

$$\|u - u_h\|_{\mathrm{l}^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} + \|u - \tilde{u}_h\|_{\mathrm{l}^\infty(\mathrm{L}^2(\Omega)^d)} \le c(\delta t^{7/4} + \delta t^{3/4} h^\ell + h^{\ell+1}). \tag{3.4}$$

Le résultat de convergence sur la pression du théorème 3.2 peut être amélioré en introduisant une norme faible dépendante du maillage. Posons $\|v_h\|_{A_h} = \sup_{v_h \in X_h} (\nabla v_h, \nabla w_h)/\|w_h\|_0$ et pour $q \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ posons $\|q\|_{B_h,A_h} = \sup_{v_h \in X_h} (q, \nabla \cdot v_h)/\|v_h\|_{A_h}$.

Théorème 3.5. – *Avec les hypothèses du théorème* 3.4, *on a :*

$$\|p - p_h\|_{\mathrm{l}^2(\|\cdot\|_{B_h,A_h})} \le c(\delta t^{3/2} + h^\ell). \tag{3.5}$$

Remarque 3.1. – Les difficultés rencontrées pour établir la convergence à l'ordre deux (ou à un ordre plus grand que un) dans des normes naturelles pour la pression (c'est-à-dire dans $\mathrm{l}^2(\mathrm{L}^2(\Omega))$)

ou pour la vitesse (c'est-à-dire dans $l^2(H^1(\Omega)^d)$) révèlent la présence d'une couche limite numérique à la frontière de Ω. Cette couche limite est imperceptible à l'ordre deux pour la vitesse dans la norme $l^2(L^2(\Omega)^d)$; en revanche, elle apparaît à un ordre compris entre un et deux lorsque la vitesse ou la pression sont mesurées dans des normes plus fortes (*voir* [5] à ce sujet).

4. L'erreur de fractionnement

On finit cette Note en montrant que l'erreur de fractionnement des algorithmes de projections basés sur une pression incrémentale est d'ordre deux sur la vitesse dans la norme $l^2(L^2(\Omega)^d)$, que l'approximation de la dérivée temporelle soit d'ordre un ou deux. Pour illustrer cette propriété remarquable, considérons l'algorithme de projection incrémental suivant : pour $0 \leq k \leq K-1$, chercher $\tilde{u}_h^{k+1} \in X_h$, $u_h^{k+1} \in Y_h$ et $p_h^{k+1} \in M_h$ tels que :

$$\frac{(\tilde{u}_h^{k+1}, v_h) - (u_h^k, v_h)}{\delta t} + (\nabla \tilde{u}_h^{k+1}, \nabla v_h) + d(\tilde{u}_h^k, \tilde{u}_h^{k+1}, v_h) = (f^{k+1}, v_h) - (B_h^t p_h^k, v_h), \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{u_h^{k+1} - \tilde{u}_h^{k+1}}{\delta t} + C_h^t(p_h^{k+1} - p_h^k) = 0, \\ C_h u_h^{k+1} = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Considérons maintenant $(w_{z,h}^{k+1}, q_{z,h}^{k+1}) \in X_h \times M_h$ la solution de l'algorithme totalement couplé (c'est-à-dire l'algorithme correspondant à la même approximation temporelle, mais en gardant la pression implicite). La différence entre $w_{z,h}^{k+1}$ et $\tilde{u}_h^{k+1}$ ou bien entre $w_{z,h}^{k+1}$ et u_h^{k+1} est, par définition, l'erreur de fractionnement. C'est l'erreur induite par le découplage, opéré dans l'algorithme de projection, entre la contrainte d'incompressibilité et les phénomènes de convection-diffusion. On a le résultat suivant :

THÉORÈME 4.1. – Il existe $c > 0$ qui ne dépend que de $(w_{z,h}, q_{z,h})$ et T, tel que :

$$\|w_{z,h} - u_h\|_{l^2(L^2(\Omega)^d)} + \|w_{z,h} - \tilde{u}_h\|_{l^2(L^2(\Omega)^d)} \leq c\delta t^2. \tag{4.3}$$

Ce résultat un peu surprenant (noter que (4.1)-(4.2) est *a priori* d'ordre $\mathcal{O}(\delta t)$) peut être vérifié numériquement. La solution du sytème couplé peut être calculée de multiples façons (résolution directe ou itérative de l'opérateur d'Uzawa, technique de matrice d'influence, etc.), mais en pratique son évaluation est toujours plus coûteuse que celle de la solution découplée (des rapports 20 à 50 en temps de calcul sont typiques). Cette expérience a été réalisée dans [4] pour le problème de la cavité entraînée en dimension 2 en utilisant des éléments finis P_1/P_2. L'expérience numérique dans [4] montre clairement que l'erreur de fractionnement est d'ordre deux conformément à l'énoncé du théorème 4.1.

Note remise le 7 mars 1997, acceptée après révision le 3 novembre 1997.

[1] **Chorin A. J., 1968**, Numerical solution of the Navier-Stokes equations, *Math. Comp.*, 22, p. 745-762.

[2] **Goda K., 1979**, A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two- or three-dimensional cavity flows, *J. Comput. Phys.*, 30, p. 76-95.

[3] **Guermond J.-L., 1996**, Some practical implementations of projection methods for Navier-Stokes equations, *Modél. Math. Anal. Numér.* (M^2AN), 30, 5, p. 637-667.

[4] **Guermond J.-L., Quartapelle L., 1997**, Calculation of incompressible viscous flows by an unconditionally stable projection finite element method, *J. Comput. Phys.*, 132, 1, p. 12-33.

[5] **Rannacher R., 1992**, On Chorin's projection method for the incompressible Navier-Stokes equations, *Lectures Notes in Mathematics*, 1530, Springer, Berlin, p. 167-183.

[6] **Temam R., 1968**, Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes, *Bull. Soc. Math. France*, 98, p. 115-152.

[7] **Van Kan J., 1986**, A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7, 3, p. 870-891.