

# Stabilisation par viscosité de sous-maille pour l'approximation de Galerkin des opérateurs linéaires monotones

Jean-Luc GUERMOND

LIMSI, Université de Paris-Sud, B.P. 133, 91403 Orsay cedex, France  
Courriel : guermond@limsi.fr

(Reçu le 27 octobre 1998, accepté après révision le 11 janvier 1999)

---

**Résumé.** On présente une méthode de stabilisation pour l'approximation des opérateurs linéaires monotones. L'idée principale consiste à décomposer l'espace d'approximation en échelles résolues et échelles de sous-maille de sorte que la forme bilinéaire du problème satisfait une condition inf-sup par rapport à cette décomposition. On obtient une approximation de Galerkin optimale en introduisant un terme de diffusion artificiel sur les petites échelles. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

## *Subgrid stabilization of Galerkin approximations of monotone operators*

**Abstract.** *This paper presents a stabilized Galerkin technique for approximating monotone linear operators in Hilbert spaces. The key idea consists in introducing an approximation space that is broken up into resolved and subgrid scales so that the bilinear form associated with the problem satisfies a uniform inf-sup condition with respect to this decomposition. An optimal Galerkin approximation is obtained by introducing an artificial diffusion on the subgrid scales.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

---

## **Abridged English Version**

Let  $V \subset L$  be real Hilbert spaces with dense and continuous imbedding ( $V \subset L \equiv L' \subset V'$ ). Let  $a \in \mathcal{L}(V \times L, \mathbb{R})$  be a monotone bilinear form ( $\forall u \in V, a(u, u) \geq 0$ ) such that (1.1) holds. The property (1.1) is equivalent to assuming that the problem (1.2) is well posed. The objective of this Note is to propose a stabilized Galerkin approximation for (1.2). To this end, we introduce a sequence of finite-dimensional subspaces of  $V$ , say  $(X_H)_{(H>0)}$ , and we assume that there is  $W$ , a dense subspace of  $V$ , so that the approximation property (2.1) holds.

---

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

In general, the quantity  $\inf_{u_H \in X_H} \sup_{v_h \in X_h} (a(u_H, v_h) / \|u_H\|_V \|v_h\|_L)$  is not bounded from below uniformly with respect to  $H$  by a strictly positive constant; as a result, the standard Galerkin approximation of (1.2) is usually not optimal. To avoid this difficulty, we propose to enlarge the space of the test functions; that is, we introduce a new sequence of finite-dimensional spaces,  $X_h^H \subset V$  and  $X_h^H \cap X_H = \emptyset$ , so that when setting  $X_h = X_H \oplus X_h^H$ , the bilinear form  $a$  satisfies the uniform inf-sup condition (2.2). One may think of  $X_H$  as being composed of the resolvable scales whereas  $X_h^H$  is composed of subgrid scales. We also define a filtering operator  $P_H : X_h \rightarrow X_H$  as being the projection associated with the decomposition  $X_h = X_H \oplus X_h^H$ . We assume that  $P_H$  is stable in  $L$  uniformly with respect to  $(H, h)$ . For all  $v_h$  in  $X_h$ , we set  $v_H = P_H v_h$  and  $v_h^H = v_h - v_H$ .

The inf-sup condition (2.2) will allow the control of the resolvable scales of the approximate solution, but to control the subgrid scales we introduce an artificial diffusion mechanism as follows: we set  $\lambda(h) = 1 / \sup_{v_h \in X_h} (\|v_h\|_V / \|v_h\|_L)$ , we introduce a norm  $\|\cdot\|_b$  satisfying (2.3), and finally we define  $b_h \in \mathcal{L}(X_h^H \times X_h^H, \mathbb{R})$  with the continuity and coercivity properties (2.4). The simplest choice is  $b_h(v_h^H, w_h^H) = \lambda(h)(v_h^H, w_h^H)_V$ , but other choices are possible in practice (see (2.5)).

The (stabilized) Galerkin problem we consider now is: find  $u_h$  in  $X_h$  so that (2.6) holds. Owing to the inf-sup condition (2.2) this problem has a unique solution and we have:

**THEOREM 1.1.** – *The solution of (2.6) satisfies (2.7) and if  $u \in W$ , the estimates (2.8) hold.*

In practice, when  $X_H$  is a finite element space we have  $\lambda(h) \sim H$ ; as a result, the error estimate (2.8) is optimal in the norm of  $V$ . Note also, that when  $a$  is associated with a transport equation, (2.8) is identical to the error estimate of the streamline diffusion technique (cf. [4] and [6]). The subgrid technique can be extended to take into account singular perturbations as shown in §4.

Now we focus our attention on linear PDE's of first order, and for this class of problems we build  $\mathbb{P}_1$  and  $\mathbb{P}_2$  approximation spaces that satisfy the hypotheses of the abstract framework defined above. Let  $\Omega$  be a bounded open set in  $\mathbb{R}^d$ . For  $k \in \{1, \dots, d\}$  and  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  define  $A^k : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ , and set  $\beta = (A^1, \dots, A^d)$ . For a smooth function  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , we define  $\beta \cdot \nabla u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  by  $(\beta \cdot \nabla u)_i = \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^m A_{ij}^k \partial_{x_k} u_j$  for  $1 \leq i \leq m$ . For a smooth function  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  we define  $v \cdot (\beta \cdot \nabla u) = \sum_{i=1}^m v_i (\beta \cdot \nabla u)_i$ , and we denote  $|u|_{1,\beta} = [\int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u) \cdot (\beta \cdot \nabla u)]^{1/2}$ .

Assume, for the sake of simplicity, that  $\Omega$  is a polyhedron in  $\mathbb{R}^d$  and let  $\mathcal{T}_H$  be a regular, quasi-uniform triangulation of  $\Omega$  composed of affine simplexes. We denote by  $\hat{T}$  the reference simplex and by  $F_H : T_H \leftarrow \hat{T}$  the affine mapping that maps  $T_H$  onto  $\hat{T}$ . To build  $\mathbb{P}_1$  or  $\mathbb{P}_2$  finite element approximation spaces, we define  $X_H$  as being the  $m$ -tensor product of the  $\mathbb{P}_1$  or  $\mathbb{P}_2$  scalar finite element space based on  $\mathcal{T}_H$ . For the  $\mathbb{P}_1$  approximation, we define  $\hat{\psi} \in H_0^1(\hat{T})$  with  $0 \leq \hat{\psi} \leq 1$ , and we set  $X_h^H = \bigoplus_{T_H} [\text{span}\{\hat{\psi}(F_H)\}]^m$ . For the  $\mathbb{P}_2$  approximation, we consider  $d+1$  independent functions of  $H_0^1(\hat{T})$ ,  $\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_{d+1}$ , and we assume that these functions are globally invariant by the symmetries of  $\hat{T}$ . Finally, we set  $X_h^H = \bigoplus_{T_H} [\text{span}\{\hat{\psi}_1(F_H), \dots, \hat{\psi}_{d+1}(F_H)\}]^m$ .

In the two cases introduced above, the decomposition  $X_h = X_H \oplus X_h^H$  is  $L^2$ -stable and the couple  $(X_H, X_h)$  is such that Lemma 4.1 and Corollary 5.1 hold. As a result, the subgrid stabilization technique can be applied for approximating PDE's involving the bilinear form  $\int_{\Omega} v \cdot \sigma \cdot u + v \cdot (\beta \cdot \nabla u)$ , where the  $m \times m$  matrix-valued field  $\sigma$  and  $\beta$  satisfy suitable regularity and monotony hypotheses.

## 1. Le problème modèle

Soient  $V \subset L$  deux espaces de Hilbert réels avec injection dense et continue; on identifie  $V \subset L \equiv L' \subset V'$ . Soit  $a \in \mathcal{L}(V \times L, \mathbb{R})$  une forme bilinéaire monotone ( $\forall u \in V, a(u, u) \geq 0$ )

telle que :

$$\exists c > 0, \quad \inf_{u \in V} \sup_{v \in L} \frac{a(u, v)}{\|u\|_V \|v\|_L} \geq c, \quad \forall v \in L, (v \neq 0) \implies \left( \sup_{u \in V} \frac{a(u, v)}{\|u\|_V} \neq 0 \right). \quad (1.1)$$

L'hypothèse (1.1) est équivalente à supposer que le problème suivant est bien posé :

$$\text{pour } f \in L, \text{ trouver } u \in V \text{ tel que, } \quad \forall v \in L, \quad a(u, v) = (f, v)_L, \quad (1.2)$$

*Exemple 1.1.* – Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^d$ . Considérons dans  $\Omega$  l'équation scalaire  $\sigma u + \beta \cdot \nabla u = f$ , où  $\beta \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^d)$  est un champ de vecteur remplissant à divergence nulle si  $\sigma = 0$  ou bien  $\sigma(x) - \text{div} \beta(x)/2 \geq \sigma_0 > 0$  sinon. Ce problème entre dans le cadre ci-dessus avec  $L = L^2(\Omega)$  et  $V = \{v \in L^2(\Omega) \mid \beta \cdot \nabla v \in L^2(\Omega), v|_{\Gamma^-} = 0\}$ , où  $\Gamma^-$  est la frontière entrante.

*Exemple 1.2.* – En Posant  $V = H_0(\text{rot}, \Omega) \times H(\text{rot}, \Omega)$  et  $L = L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3$ , le problème de Maxwell simplifié : trouver  $(E, B) \in V$  tel que  $\int_{\Omega} E \cdot e + B \cdot b - e \cdot \text{rot} B + b \cdot \text{rot} E = \int_{\Omega} f \cdot e + g \cdot b$ , pour tout  $(e, b) \in L$  entre dans le cadre ci-dessus.

*Exemple 1.3.* – Le problème de Darcy :  $V = H_0(\text{div}, \Omega) \times H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  et  $L = L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$  : trouver  $(u, p) \in V$  tel que  $\int_{\Omega} u \cdot v + v \cdot \nabla p + q \text{div} u = \int_{\Omega} f \cdot v + gq$ , pour tout  $(v, q) \in L$ .

## 2. Le cadre discret

On s'intéresse dans cette Note à l'approximation de (1.2). Pour ce faire, on introduit  $(X_H)_{(H>0)}$  une suite de sous-espaces de  $V$  de dimension finie, et on suppose qu'il existe  $W$ , un sous-espace dense de  $V$ , et  $k > 0, c > 0$  tels que

$$\forall v \in W, \quad \inf_{w_H \in X_H} \|v - w_H\|_L + H \|v - w_H\|_V \leq c H^{k+1} \|v\|_W. \quad (2.1)$$

En général, la quantité  $\inf_{u_H \in X_H} \sup_{v_h \in X_h} (a(u_H, v_h) / (\|u_H\|_V \|v_h\|_L))$  n'est pas minorée uniformément par rapport à  $H$  par une constante strictement positive, il en résulte que l'approximation de Galerkin de (1.2) n'est généralement pas optimale. Pour remédier à cette difficulté il convient d'élargir l'espace des fonctions test. Cette idée conduit à introduire une nouvelle suite d'espaces de dimension finie  $X_h^H \subset V, X_h^H \cap X_H = \emptyset$ , de sorte qu'en posant  $X_h = X_H \oplus X_h^H$ , la forme  $a$  satisfait :

$$\exists c_a > 0, \quad \forall (H, h), \quad \inf_{v_H \in X_H} \sup_{\phi_h \in X_h} \frac{a(v_H, \phi_h)}{\|v_H\|_V \|\phi_h\|_L} \geq c_a. \quad (2.2)$$

Par la suite on suppose que  $P_H : X_h \rightarrow X_H$ , la projection de  $X_h$  sur  $X_H$  parallèle à  $X_h^H$ , est stable dans  $L$  uniformément par rapport à  $(H, h)$ . Pour tout  $v_h$  dans  $X_h$  on pose  $v_H = P_H v_h$  et  $v_h^H = v_h - v_H$ . L'espace  $X_H$  est moralement associé aux « échelles résolues », alors que  $X_h^H$  est associé aux « échelles non résolues », et  $P_H$  est un filtre. L'inégalité (2.2) va permettre de contrôler les échelles résolues de l'approximation numérique. Le problème qui se pose ensuite est de contrôler les échelles non résolues. La deuxième idée importante de cette Note est que, puisque  $a$  est monotone, il est possible de contrôler ces échelles par une viscosité artificielle. Dans cette perspective on pose  $\lambda(h) = 1 / \sup_{v_h \in X_h} (\|v_h\|_V / \|v_h\|_L)$  et on introduit une norme  $\|\cdot\|_b$  telle que

$$\exists c_{v1} > 0, \quad \exists c_{v2} > 0, \quad \forall v_h^H \in X_h^H, \quad c_{v1} \|v_h^H\|_V \leq \|v_h^H\|_b \leq c_{v2} \lambda(h)^{-1} \|v_h^H\|_L. \quad (2.3)$$

## J.-L. Guermond

Enfin, on définit  $b_h \in \mathcal{L}(X_h^H \times X_h^H, \mathbb{R})$  tel que pour tout  $(v_h^H, w_h^H)$  dans  $X_h^H \times X_h^H$

$$\lambda(h) \|v_h^H\|_b^2 \leq b_h(v_h^H, v_h^H) \quad \text{et} \quad b_h(v_h^H, w_h^H) \leq c_B \lambda(h) \|v_h^H\|_b \|w_h^H\|_b. \quad (2.4)$$

*Remarque 2.1.* –  $\lambda(h) > 0$  car  $X_h$  est de dimension finie. En particulier, pour un espace d'éléments finis on a  $\lambda(h) \sim H$  (cf. [5]).

*Exemple 2.1.* – Le choix le plus simple est  $b_h(v_h^H, w_h^H) = \lambda(h)(v_h^H, w_h^H)_V$ . Une autre possibilité consiste à prendre  $X \subset V$  tel que  $\sup_{v_h \in X_h} (\|v_h\|_X / \|v_h\|_L) \leq c\lambda(h)^{-1}$ . En supposant  $X_h \subset X$ , on peut choisir  $b_h(v_h^H, w_h^H) = \lambda(h)(v_h^H, w_h^H)_X$ . Ainsi, dans le cadre de l'exemple 1.1, (puisque  $H^1(\Omega) \subset V$ ) deux définitions sont possibles pour  $b_h(v_h^H, w_h^H)$  :

$$\lambda(h) \int_{\Omega} v_h^H w_h^H + (\beta \cdot \nabla v_h^H)(\beta \cdot \nabla w_h^H) \quad \text{ou} \quad \lambda(h) \int_{\Omega} v_h^H w_h^H + (\nabla v_h^H) \cdot (\nabla w_h^H). \quad (2.5)$$

Par la suite on s'intéresse au problème de Galerkin suivant : trouver  $u_h$  dans  $X_h$  tel que :

$$\forall v_h \in X_h, \quad a(u_h, v_h) + b_h(v_h^H, v_h^H) = (f, v_h). \quad (2.6)$$

**THÉORÈME 3.1.** – *Le problème (2.6) a une solution unique, et la solution satisfait :*

$$\begin{cases} a_s(u - u_h, u - u_h)^{1/2} \leq c \inf_{w_H \in X_H} [\lambda(h)^{-1/2} \|u - w_H\|_L + \lambda(h)^{1/2} \|u - w_H\|_V], \\ \|u - u_h\|_V + \|u_h^H\|_b \leq c \inf_{w_H \in X_H} [\lambda(h)^{-1} \|u - w_H\|_L + \|u - w_H\|_V], \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $a_s \in \mathcal{L}(V \times V, \mathbb{R})$  est la partie symétrique de  $a$  :  $a_s(u, v) = \frac{1}{2}(a(u, v) + a(v, u))$ .

**COROLLAIRE 3.1.** – *Si  $u$ , solution de (1.2), est dans  $W$ , la solution  $u_h$  de (2.6) satisfait :*

$$\begin{cases} a_s(u - u_h, u - u_h)^{1/2} \leq c(H/\lambda(h))^{1/2} H^{k+1/2} \|u\|_W, \\ \|u - u_h\|_V + \|u_h^H\|_b \leq c(H/\lambda(h)) H^k \|u\|_W. \end{cases} \quad (2.8)$$

*Remarque 2.2.* – Lorsque  $X_H$  est un espace d'éléments finis on a  $\lambda(h) \sim H$  et l'estimation (2.8) est optimale dans  $V$ . Si  $a_s$  est  $L$ -coercive, (2.8) n'est pas optimal dans  $L$  : il manque un facteur  $H^{1/2}$ . On peut retrouver l'optimalité pour des éléments finis si le maillage satisfait certaines propriétés géométriques (voir [8] et [5] pour d'autres détails).

*Remarque 2.3.* – Pour les équations de transport scalaires, (2.8) est identique à l'estimation fournie par la méthode de diffusion ligne de courant (voir [4] et [6]).

### 3. Un problème de perturbation singulière

On conserve les hypothèses précédentes sur  $a$ ,  $V$ ,  $L$  et on introduit un nouvel espace de Hilbert  $X$  qui est dense et s'injecte continuellement dans  $V$ . On introduit  $d \in \mathcal{L}(X \times X, \mathbb{R})$  et on suppose que  $a + d$  est  $X$  coercive :  $\|v\|_X^2 \leq a(v, v) + d(v, v)$ . pour  $0 \leq \epsilon \leq 1$ , on s'intéresse au problème :

$$\text{pour } f \in L, \text{ trouver } u \in X, \quad \forall v \in X, \quad a(u, v) + \epsilon d(u, v) = (f, v). \quad (3.1)$$

*Exemple 3.1.* – Penser au problème  $\sigma u + \beta \cdot \nabla u - \epsilon \Delta u = f$ , avec des hypothèses convenables sur  $\sigma$ ,  $\beta$  et les conditions aux limites ; par exemple  $X = H_0^1(\Omega)$  et  $V, L$  définis dans l'exemple 1.1.

On se donne  $X_h \subset X$  et on suppose qu'il existe  $c > 0$  indépendant de  $(H, h)$  tel que  $c \sup_{v_h \in X_h} (\|v_h\|_X / \|v_h\|_L) \leq \lambda(h)^{-1}$ . Cette hypothèse signifie que  $X$  et  $V$  sont associés à des opérateurs différentiels de même ordre. On cherche  $u_h \in X_h$  tel que :

$$\forall v_h \in X_h, \quad a(u_h, v_h) + \epsilon d(u_h, v_h) + b_h(u_h^H, v_h^H) = (f, v_h). \quad (3.2)$$

THÉORÈME 3.1. – *La solution de (3.2) satisfait :*

$$\begin{aligned} a_s(u - u_h, u - u_h)^{1/2} + \epsilon^{1/2} \|u - u_h\|_X &\leq c \inf_{w_H \in X_H} \left[ \lambda(h)^{1/2} \|u - w_H\|_V \right. \\ &\quad \left. + c^{1/2} \|u - w_H\|_X + \lambda(h)^{-1/2} \|u - w_H\|_L \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\|u - u_h\|_V \leq c \inf_{w_H \in X_H} [\|u - w_H\|_X + \lambda(h)^{-1} \|u - w_H\|_L]. \quad (3.4)$$

#### 4. Exemples

Soit  $\Omega$  un ouvert polyédrique borné de  $\mathbb{R}^d$ . Pour  $k \in \{1, \dots, d\}$  et  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  on se donne  $A^k : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ , et on pose  $\beta = (A^1, \dots, A^d)$ . Pour une fonction régulière  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , on définit la fonction  $\beta \cdot \nabla u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  par  $(\beta \cdot \nabla u)_i = \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^m A_{ij}^k \partial_{x_k} u_j$  pour  $1 \leq i \leq m$ . Pour une fonction régulière  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  on définit  $v \cdot (\beta \cdot \nabla u) = \sum_{i=1}^m v_i (\beta \cdot \nabla u)_i$ , et on note  $|u|_{1,\beta} = [\int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u) \cdot (\beta \cdot \nabla u)]^{1/2}$ . On s'intéresse aux problèmes basés sur la forme  $a(u, v) = \int_{\Omega} v \cdot \sigma \cdot u + v \cdot (\beta \cdot \nabla u)$ , où  $\sigma$  et  $\beta$  satisfont des hypothèses convenables.

Soit  $\mathcal{T}_H$  une triangulation régulière quasi-uniforme de  $\Omega$  composée de simplexes affines  $(T_H)$ . On note  $\hat{T}$  le simplexe de référence et  $F_H : T_H \rightarrow \hat{T}$  la transformation affine de  $T_H$  sur  $\hat{T}$ . On propose d'abord un espace d'approximation par éléments finis  $\mathbb{P}_1$ . Soit  $X_H$  tel que

$$X_H = \{v_H \in H^1(\Omega)^m \mid v_H|_{T_H} \in \mathbb{P}_1(T_H)^m, \forall T_H \in \mathcal{T}_H\}. \quad (4.1)$$

Soit  $\hat{\psi} \in H_0^1(\hat{T})$  avec  $0 \leq \hat{\psi} \leq 1$ . On définit  $X_h^H = \bigoplus_{T_H} [\text{vect}(\hat{\psi}(F_H))]^m$ . Pour construire une approximation  $\mathbb{P}_2$  on définit

$$X_H = \{v_H \in H^1(\Omega)^m \mid v_H|_{T_H} \in \mathbb{P}_2(T_H)^m, \forall T_H \in \mathcal{T}_H\}. \quad (4.2)$$

Soient  $\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_{d+1}$  une famille de  $d+1$  fonctions de  $H_0^1(\hat{T})$ , linéairement indépendantes et globalement invariantes par toutes les symétries de  $\hat{T}$ . On pose  $X_h^H = \bigoplus_{T_H} [\text{vect}(\hat{\psi}_1(F_H), \dots, \hat{\psi}_{d+1}(F_H))]^m$ . Dans les deux cas ci-dessus, la décomposition  $X_h = X_H \oplus X_h^H$  est  $L^2$ -stable et satisfait :

LEMME 5.1. – *Si les  $A_{ij}^k$  sont constants par morceaux sur les simplexes  $T_H$  de  $\mathcal{T}_H$*

$$\exists c_\beta > 0, \forall (H, h), \quad \inf_{u_H \in X_H} \sup_{v_h \in X_h} \frac{\int_{\Omega} v_h \cdot (\beta \cdot \nabla u_H)}{|u_H|_{1,\beta} \|v_h\|_0} \geq c_\beta. \quad (4.3)$$

COROLLAIRE 5.1. – *Si  $A_{ij}^k \in C^1(\bar{\Omega})$ , il existe  $c_\beta > 0$  et  $c_\delta \geq 0$ , indépendants  $(H, h)$ , tels que :*

$$\forall u_H \in X_H, \quad \sup_{v_h \in X_h} \frac{\int_{\Omega} v_h \cdot (\beta \cdot \nabla u_H)}{\|v_h\|_0} \geq c_\beta |u_H|_{1,\beta} - c_\delta \|u_H\|_0. \quad (4.4)$$

Remarque 4.1. – Ces deux propriétés permettent d'appliquer la théorie présentée ci-dessus aux problèmes basés sur la forme  $a(u, v)$  définie ci-dessus. Cette théorie permet d'approcher correctement

les problèmes de convection-diffusion à convection dominante (exemple 1.1), et problèmes de Maxwell ou de Darcy (exemples 1.2 et 1.3) avec des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  ou  $\mathbb{P}_2$ .

*Remarque 4.2.* – Les propriétés de stabilisation des bulles pour les problèmes de convection-diffusion ont été mis en évidence dans [1], [2] et [3], où toutefois, la définition des bulles est implicite. Il semble que la mise en évidence de l'importance de l'inégalité inf-sup (2.2) pour la classe des problèmes (1.2) soit nouvelle.

*Remarque 4.3.* – Pour les deux exemples ci-dessus,  $X_h^H$  représente littéralement des « échelles de sous-maille », d'où le nom de la méthode. Le notion de séparation d'échelles et de dissipation des échelles non résolues est similaire à l'idée de viscosité spectrale introduite par Tadmor [7].

*Exemple 4.1.* – Pour illustrer les performances de la méthode, on l'applique en 2D au problème  $\sigma u + \partial_y u = f$  avec  $u = \cos(2\pi x) \cos(8\pi y)$  dans  $\Omega = ]0, 1]^2$  et  $\sigma = 10^{-2}$ . On utilise une approximation  $\mathbb{P}_1$  pour  $X_H$  et on engendre  $X_h^H$  localement sur chaque simplexe  $T_H$  par la fonction  $\mathbb{P}_1$  par morceaux sur  $T_H$  qui vaut 1 au barycentre de  $T_H$  et 0 aux trois sommets de  $T_H$ . Pour  $b_h$  on pose  $b_h(v_h^H, w_h^H) = \sum_{T_H} \text{mes}(T_H)^{1/2} \int_{T_H} \nabla v_h^H \cdot \nabla w_h^H$ . Sur la figure 1 on a représenté à gauche l'interpolé  $\mathbb{P}_1$  de la solution, au centre la solution stabilisée par viscosité de sous-maille et à droite la solution du problème de Galerkin standard pour un maillage composé de 800 triangles ( $H \sim 1/20$ ). La supériorité de la technique proposée est claire.

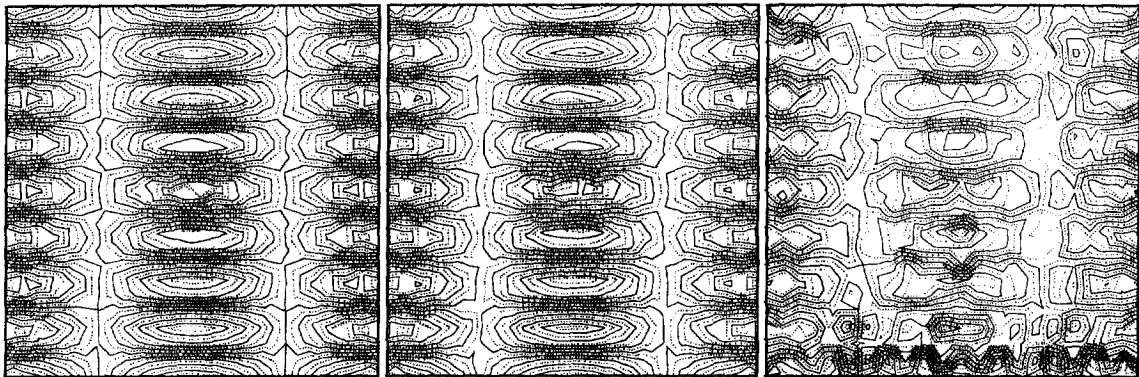


Figure 1. – (Gauche) interpolé  $\mathbb{P}_1$  de la solution, (centre) solution stabilisée par viscosité de sous-maille, (droite) solution de Galerkin standard.

### Références bibliographiques

- [1] Baiocchi C., Brezzi F., Franca L.P., Virtual bubbles and Galerkin-least-square type methods (Ga.L.S). *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 105 (1993) 125–141.
- [2] Brezzi F, Bristeau M.O., Franca L., Mallet M., Rogé G., A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 96 (1992) 117–129.
- [3] Brezzi F, Franca L., Hughes T.J.R., Russo A.,  $b = \int g$ , *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* (1997).
- [4] Brooks A.N., Hughes T.J.R., Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 32 (1982) 199–259.
- [5] Guermond J.-L., Subgrid stabilization of Galerkin approximations of transport equations, LIMS 98-01 ; Subgrid stabilization of Galerkin approximations of monotone operators, LIMS 98-03.
- [6] Johnson C., Nävert U., Pitkäranta J., Finite element methods for linear hyperbolic equations, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 45 (1984) 285–312.
- [7] Tadmor E., Convergence of spectral methods for nonlinear conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.* 26 (1) (1989) 30–44.
- [8] Zhou G., How accurate is the streamline diffusion finite element method?, *Math. Comp.* 66 (1997) 31–44.