C. R. Acad. Sci. Paris, t. 333, Série I, p. 1111–1116, 2001
Analyse numérique/*Numerical Analysis*

Quelques résultats nouveaux sur les méthodes de projection

Jean-Luc GUERMOND [a], Jie SHEN [b]

[a] **LIMSI (CNRS-UPR 3152), BP 133, 91403, Orsay, France**
[b] **Department of Mathematics, University of Central Florida, Orlando, FL 32816, USA**
Courriel : guermond@limsi.fr; shen@math.psu.edu

(Reçu le 17 septembre 2001, accepté le 1er octobre 2001)

Résumé. Nous revisitons les méthodes de projection de Chorin–Temam du type correction de pression et nous introduisons une nouvelle classe de méthodes que nous appelons correction de vitesse. Pour une variante de la méthode de correction de pression et une variante de la méthode de correction de vitesse, nous prouvons une convergence en $\mathcal{O}(\delta t^2)$ sur la vitesse en norme L^2 et une convergence en $\mathcal{O}(\delta t^{3/2})$ sur la vitesse en norme H^1 et la pression en norme L^2. Nous montrons aussi que les méthodes de correction de vitesse fournissent le bon cadre fonctionel pour l'analyse des méthodes de splitting introduites dans [4,3]. Cette Note fournit donc en corollaire le premier résultat de stabilité et de convergence pour les méthodes [4,3]. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

New results on several projection methods

Abstract. *We revisit fractional step projection methods for solving the Navier–Stokes equations. We study a variant of pressure-correction methods and introduce a new class of velocity-correction methods. We prove stability and $\mathcal{O}(\delta t^2)$ convergence in the L^2 norm of the velocity for both variants. We also prove $\mathcal{O}(\delta t^{3/2})$ convergence in the H^1 norm of the velocity and the L^2 norm of the pressure. We show that the new family of projection methods can be related to a set of methods introduced in* [4,3]. *As a result, this Note provides the first rigorous proof of stability and convergence of the methods introduced in* [4,3]. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Let us consider the time dependent incompressible Navier–Stokes equations (1). There are numerous ways of approximating the solution to (1) in time. Undoubtedly, the most popular one consists of using the Chorin–Temam projection methods, which are predictor–corrector strategies aiming at uncoupling viscous diffusion and incompressibility effects. Up to now, the most accurate variants of this class of methods are the pressure-correction methods: the pressure is made explicit first then corrected in a second substep by projecting the provisional velocity onto the space of solenoidal vector fields. Second order accuracy in time

Note présentée par Olivier PIRONNEAU.

S0764-4442(01)02157-7/FLA

on the velocity in the L^2 norm has been proved in [6] and [2]; but, due to the presence of a numerical boundary layer, only $\mathcal{O}(\delta t)$ estimates on the pressure are available. A new variant of the method has been proposed in [5]; it consists in subtracting the divergence of the provisional velocity from the pressure correction. One of the goal of this Note is to show that the modified algorithm is indeed more accurate than the standard form. Furthermore, we introduce a new family of velocity-correction methods and show that one variant of these new methods has the same convergence properties as the modified pressure-correction algorithm.

Adopting the second order Backward Finite Differencing scheme for approximating the time derivative, the algorithm proposed in [5] is (2)–(3)–(4). The original aspect of this algorithm is the divergence correction in step (4). We shall refer to this algorithm as the rotational form of the pressure-correction algorithm owing to the following remark. By adding (2) to (3), we obtain (5) which is an approximation of the momentum equation written in rotational form: $\partial_t u_e + \nu\nabla\times\nabla\times u_e + \nabla p_e = f$. Provided that the scheme is initialised so that hypothesis (H1) holds, the first major result of this Note is the convergence estimates stated in Theorem 2.1. This theorem establishes that the scheme is stable (which was not proved yet) and is superior to the standard pressure-correction algorithm for it yields $\mathcal{O}(\delta t^{3/2})$ convergence estimates in the H^1 norm of the velocity and the L^2 norm of the pressure.

Let us now introduce a new set of projection methods. We adopt a strategy that is the dual to that of the pressure-correction methods: we make explicit the Laplacian of the velocity in the first substep and correct it in the second substep. Recalling the identity $\nabla^2\tilde{u}^k = \nabla\nabla\cdot\tilde{u}^k - \nabla\times\nabla\times\tilde{u}^k$, and expecting $\nabla\nabla\cdot\tilde{u}^k$ to be reasonably small, we take $-\nabla\times\nabla\times\tilde{u}^k$ as a first order approximation of the Laplacian of the velocity. The resulting algorithm is (8)–(9). We refer to this algorithm as the rotational form of the velocity-correction method, the standard form being the algorithm obtained by using $\nabla^2\tilde{u}^k$ in the two substeps (see (6)–(7)). Assuming the initialisation hypothesis (H2) to hold, the second major result of this Note is Theorem 3.1. Note that the convergence rates are identical to that obtained by means of the rotational form of the pressure-correction algorithm.

Note that (8) is a Poisson problem supplemented with a Neumann boundary condition; however, it cannot be solved in the usual weak sense by means of H^1-conformal finite elements, for there is a second derivative in the right-hand side. A simple answer to this problem consists in rewriting the projection step in an other equivalent form by making algebraic substitutions. Subtracting step (8) at time t^k to step (8) at time t^{k+1} and substituting step (9) at time t^k into the resulting equation, we obtain the equivalent scheme (10)–(11)–(12). In practice (10) amounts to solving (13). Note that the projected velocity u^{k+1} has been completely eliminated from the final algorithm (13)–(11)–(12), i.e., the quantity of interest is $\tilde{u}^{k+1}$.

The new family of velocity-correction methods can be related to a set of schemes introduced in [4,3]. By setting $\hat{u}^{k+1} = u^{k+1} + \frac{2\nu\delta t}{3}\nabla\times\nabla\times\tilde{u}^k$, we rewrite (8)–(9) in the form (14)–(15) which, modulo the time stepping, is the method proposed in [4,3]. Note however that the functional framework in play in (14)–(15) is not classical, for it involves the trace of a second derivative; as a consequence, this algorithm cannot be used *stricto sensu* in the framework of H^1-conformal approximation methods. For this reason, this class of algorithms has never been analysed and has been used with spectral methods only. As we have shown that (14)–(15) is equivalent to the rotational form of the velocity-correction method, the present Note provides the first rigorous proof of stability and convergence of the class of splitting techniques introduced in [4] and [3]. We also emphasise that contrary to the splitting techniques in question, our velocity-correction methods are set in the standard L^2 weak form, and consequently can be easily implemented by means of any H^1-approximation methods, in particular the finite element methods.

It is out of question to give here the details of the proofs of the two theorems announced above, but the main ingredient is the estimate (16) in Lemma 5.1, which is a measure of the splitting error. This estimate on the divergence of the velocity holds for both methods presented in this Note, and most remarkably holds also if the second-order time stepping is replaced by the first order Euler time stepping.

1. Introduction

Nous nous intéressons à l'approximation en temps des équations de Navier–Stokes incompressible :

$$\begin{cases} \partial_t u_e - \nu\nabla^2 u_e + u_e\cdot\nabla u_e + \nabla p_e = f \quad \text{dans } \Omega\times[0,T], \\ \nabla\cdot u_e = 0 \quad \text{dans } \Omega\times[0,T], \\ ue|_\Gamma = 0, \\ u_{e|t=0} = v_0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $f(t)$ est un terme source, v_0 une donnée solénoidale à trace normale nulle. La domaine fluide Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ ($d=2$ ou 3). La frontière Γ et les données sont supposées suffisamment régulières de sorte que la solution possède toute la régularité nécessaire par la suite.

Il existe de nombreuses techniques pour approcher la solution de (1) en temps. Les plus utilisées actuellement sont probablement les méthodes de projection de Chorin–Temam. Ce sont des méthodes de marche en temps à pas fractionnaires visant à découpler la vitesse et la pression. La version la plus précise connue actuellement est la méthode de correction de pression [1,7] et des preuves de convergence en $\mathcal{O}(\delta t^2)$ sur la vitesse en norme L^2 ont été données dans [6] et [2]. Toutefois, cet algorithme est souvent critiqué car il impose une condition aux limites artificielle sur la pression qui limite la convergence sur cette quantité en norme L^2 à l'ordre $\mathcal{O}(\delta t)$ et se manifeste en pratique par une couche limite numérique.

À partir de considérations heuristiques certains auteurs (e.g., [5]) ont proposé de modifier l'algorithme en ajoutant un nouveau terme à la correction de pression. Cette Note a trois objectifs :

– Démontrer que la nouvelle variante de l'algorithme de correction de pression est effectivement plus précise que la version standard car elle fournit une estimation en $\mathcal{O}(\delta t^{3/2})$ sur la vitesse en norme H^1 et la pression en norme L^2 (cf. § 2).
– Introduire une nouvelle classe d'algorithmes (que nous appelons méthode de correction de vitesse) et montrer qu'une variante de cette classe de méthodes possède les mêmes propriétés de convergence que la nouvelle variante de l'algorithme de correction de pression (cf. § 3).
– Montrer que les méthodes de correction de vitesse fournissent le bon cadre mathématique pour étudier les techniques de splitting introduites de façon heuristique dans [4,3] (cf. § 4).

2. Forme rotationnelle de la méthode de correction de pression

Nous étudions dans cette section la nouvelle variante de l'algorithme de correction de pression introduite dans [5].

Soit $[0,T]$ l'intervalle de temps sur lequel on cherche à approcher la solution de (1). Soit $\delta t > 0$ le pas de temps et posons $t^k = k\delta t$ pour $0 \leqslant k \leqslant K = [T/\delta t]$. Nous adoptons l'approximation par différentiation rétrograde d'ordre deux (BDF2) pour approcher la dérivée temporelle. Posons $u^0 = v_0$, et supposons connues de bonnes approximation de $u_e(\delta t)$ et $p_e(\delta t)$ que nous notons u^1 et p^1. Pour simplifier l'exposé nous abandonnons le terme non linéaire que nous supposons traité explicitement. Pour $k \geqslant 1$ nous considérons

$$\begin{cases} \frac{1}{2\delta t}(3\tilde{u}^{k+1} - 4u^k + u^{k-1}) - \nu\nabla^2\tilde{u}^{k+1} + \nabla p^k = f(t^{k+1}), \\ \tilde{u}^{k+1}|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2\delta t}(u^{k+1} - \tilde{u}^{k+1}) + \nabla\phi^{k+1} = 0, \\ \nabla\cdot u^{k+1} = 0, \\ u^{k+1}\cdot n|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{3}$$

$$p^{k+1} = \phi^{k+1} + p^k - \nu\nabla\cdot\tilde{u}^{k+1}. \tag{4}$$

Nous appelons cet algorithme la forme rotationnelle de l'algorithme de correction de pression en vertu de la remarque suivante. En ajoutant (2) à (3), on obtient

$$\frac{1}{2\delta t}\left(3u^{k+1}-4u^k+u^{k-1}\right)+\nu\nabla\times\nabla\times\tilde{u}^{k+1}+\nabla p^{k+1}=f\left(t^{k+1}\right), \tag{5}$$

qui n'est rien d'autre qu'une approximation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement en forme rotationnelle : $\partial_t u_e+\nu\nabla\times\nabla\times u_e+\nabla p_e=f$. Lorsque la correction en divergence est absente dans (4), nous parlons de la version standard de l'algorithme de correction de pression.

Nous faisons l'hypothèse d'initialisation suivante :

$$\text{(H1)}\qquad \begin{cases} \|u_e(\delta t)-u^1\|_{0,\Omega}\leqslant c\delta t^2,\\ \|u_e(\delta t)-u^1\|_{1,\Omega}\leqslant c\delta t^{3/2},\\ \|p_e(\delta t)-p^1\|_{1,\Omega}\leqslant c\delta t. \end{cases}$$

Cette hypothèse est satisfaite si au premier pas, BDF2 est remplacé par un pas d'Euler implicite. Le premier résultat majeur de cette Note est le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. – *Si la solution de* (1) *est suffisamment régulière en espace et en temps et si l'hypothèse* (H1) *est vérifiée, la solution de* (2)–(3)–(4) *satisfait les estimations* :

$$\|u_e-u\|_{l^2(L^2(\Omega)^d)}+\|u_e-\tilde{u}\|_{l^2(L^2(\Omega)^d)}\leqslant c(u_e,p_e,T)\,\delta t^2,$$
$$\|u_e-\tilde{u}\|_{l^2(\mathrm{H}^1(\Omega)^d)}+\|p_e-p\|_{l^2(L^2(\Omega))}\leqslant c(u_e,p_e,T)\,\delta t^{3/2}.$$

Nous avons adopté les notations suivantes. Pour une suite de fonctions $\phi^0,\phi^1,\dots,\phi^K$ dans un espace de Hilbert E, nous posons $\|\phi\|_{l^2(E)}:=(\delta t\sum_{k=0}^K\|\phi^k\|_E^2)^{1/2}$, et $\|\phi\|_{l^\infty(E)}:=\max_{0\leqslant k\leqslant K}\|\phi^k\|_E$.

Remarque 1. – Aucune estimation de stabilité ni de convergence n'avait encore été établie pour l'algorithme (2)–(3)–(4). La supériorité du nouvel algorithme se manifeste par l'estimation en $\mathcal{O}(\delta t^{3/2})$ qui est nouvelle. Pour la version standard de l'algorithme, l'estimation correspondante est d'ordre un seulement.

3. Méthode de correction de vitesse : formes standard et rotationnelles

Nous proposons maintenant une nouvelle méthode à pas fractionnaires que nous baptisons correction de vitesse.

Nous adoptons la stratégie duale de la méthode de correction de pression. Rapellons que cette méthode consiste à expliciter le gradient de pression au premier sous-pas puis à corriger la pression ensuite. Nous allons donc expliciter le Laplacien de la vitesse au premier sous-pas et ensuite réaliser une correction. L'algorithme que nous proposons est le suivant : nous posons $\tilde{u}^0=v_0$, nous nous donnons $\tilde{u}^1$ une approximation raisonnable de $u_e(\delta t)$ et pour $k\geqslant 1$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\delta t}(3u^{k+1}-4\tilde{u}^k+\tilde{u}^{k-1})-\nu\nabla^2\tilde{u}^k+\nabla p^{k+1}=f(t^{k+1}),\\ \nabla\cdot u^{k+1}=0,\\ u^{k+1}\cdot n|_\Gamma=0, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2\delta t}(\tilde{u}^{k+1}-u^{k+1})-\nu\nabla^2(\tilde{u}^{k+1}-\tilde{u}^k)=0,\\ \tilde{u}^{k+1}|_\Gamma=0. \end{cases} \tag{7}$$

Nous appelons (6)–(7) la version standard de l'algorithme de correction de vitesse. Noter la similitude avec la version standard de l'algorithme de correction de pression.

Nous introduisons maintenant la version rotationnelle de l'algorithme de correction de vitesse. En rappelant la relation $\nabla^2\tilde{u}^k=\nabla\nabla\cdot\tilde{u}^k-\nabla\times\nabla\times\tilde{u}^k$, et en supposant que $\nabla\nabla\cdot\tilde{u}^k$ est suffisamment petit, nous choisissons $-\nabla\times\nabla\times\tilde{u}^k$ comme approximation d'ordre un du Laplacien de la vitesse. Nous posons $\tilde{u}^0 = v_0$, nous nous donnons $\tilde{u}^1$ une approximation raisonnable de $u_e(\delta t)$ et pour $k \geqslant 1$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\delta t}(3u^{k+1} - 4\tilde{u}^k + \tilde{u}^{k-1}) + \nu\nabla\times\nabla\times\tilde{u}^k + \nabla p^{k+1} = f(t^{k+1}), \\ \nabla\cdot u^{k+1} = 0, \\ u^{k+1}\cdot n|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2\delta t}(\tilde{u}^{k+1} - u^{k+1}) - \nu\nabla^2\tilde{u}^{k+1} - \nu\nabla\times\nabla\times\tilde{u}^k = 0, \\ \tilde{u}^{k+1}|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Nous faisons l'hypothèse suivante :

$$\text{(H2)} \qquad \begin{cases} \|u_e(\delta t) - \tilde{u}^1\|_{0,\Omega} \leqslant c\delta t^2, \\ \|u_e(\delta t) - \tilde{u}^1\|_{1,\Omega} \leqslant c\delta t^{3/2}, \\ \|u_e(\delta t) - \tilde{u}^1\|_{2,\Omega} \leqslant c\delta t. \end{cases}$$

Cette fois encore, il suffit de remplacer BDF2 au premier pas par un pas d'Euler implicite pour satisfaire (H2). Le second résultat majeur de cette Note est le théorème suivant.

THÉORÈME 3.1. – *Si la solution de* (1) *est suffisamment régulière en espace et en temps et si l'hypothèse* (H2) *est satisfaite, la solution de* (8)–(9) *satisfait les estimations* :

$$\|u_e - u\|_{l^2(L^2(\Omega)^d)} + \|u_e - \tilde{u}\|_{l^2(L^2(\Omega)^d)} \leqslant c(u_e, p_e, T)\,\delta t^2,$$
$$\|u_e - \tilde{u}\|_{l^2(\mathrm{H}^1(\Omega)^d)} + \|p_e - p\|_{l^2(L^2(\Omega))} \leqslant c(u_e, p_e, T)\,\delta t^{3/2}.$$

Remarque 2. – Pour la forme standard de la méthode de correction de vitesse, l'estimation en $\mathcal{O}(\delta t^{3/2})$ doit être remplacée par une estimation d'ordre un.

Noter que (8) (resp. (6)) est un problème de Poisson avec condition de Neumann, dont il est difficile d'approcher la solution avec des méthodes H^1-conformes car on ne peut pas tester la dérivée seconde $\nabla\times\nabla\times\tilde{u}^k$ (resp. $\nabla^2\tilde{u}^k$) contre des gradients. Nous proposons donc une reécriture équivalente. En soustrayant le pas (8) (resp. (6)) au temps t^k au pas (8) (resp. (6)) au temps t^{k+1} et en utilisant (9) (resp. (7)) au temps t^k, on obtient l'algorithme suivant qui est beaucoup plus aisé à coder :

$$\begin{cases} \frac{1}{2\delta t}(3u^{k+1} - 7\tilde{u}^k + 5\tilde{u}^{k-1} - \tilde{u}^{k-2}) + \nabla\phi^{k+1} = f(t^{k+1}) - f(t^k), \\ \nabla\cdot u^{k+1} = 0, \\ u^{k+1}\cdot n|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{10}$$

$$p^{k+1} = \phi^{k+1} + p^k - \nu\nabla\cdot\tilde{u}^k \quad (\text{resp. } p^{k+1} = \phi^{k+1} + p^k), \tag{11}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\delta t}(3\tilde{u}^{k+1} - 4\tilde{u}^k + \tilde{u}^{k-1}) - \nu\nabla^2\tilde{u}^{k+1} + \nabla p^{k+1} = f(t^{k+1}), \\ \tilde{u}^{k+1}|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{12}$$

En pratique, le pas de projection est résolu de la façon suivante : trouver $\phi^{k+1} \in \mathrm{H}^1(\Omega)\backslash\mathbb{R}$ tel que

$$\left(\nabla\phi^{k+1}, \nabla q\right) = \left(f\left(t^{k+1}\right) - f\left(t^k\right) + \frac{1}{2\delta t}\left(7\tilde{u}^k - 5\tilde{u}^{k-1} + \tilde{u}^{k-2}\right), \nabla q\right), \quad \forall q \in \mathrm{H}^1(\Omega)\backslash\mathbb{R}. \tag{13}$$

Remarque 3. – Noter que la vitesse projetée u^{k+1} a été complètement éliminée de l'algorithme (13)–(11)–(12). C'est $\tilde{u}^{k+1}$ qui est la quantité intéressante.

4. Un lien entre l'algorithme (8)–(9) et une méthode introduite dans [4,3]

Nous montrons maintenant comment l'algorithme (8)–(9) peut se ramener à une méthode de pas fractionnaire introduite dans [4] et [3].

En posant $\hat{u}^{k+1} = u^{k+1} + \frac{2\nu\delta t}{3}\nabla\times\nabla\times\tilde{u}^k$, (8)–(9) peut aussi s'écrire

$$\begin{cases} \frac{1}{2\delta t}(3\hat{u}^{k+1} - 4\tilde{u}^k + \tilde{u}^{k-1}) + \nabla p^{k+1} = f(t^{k+1}), \\ \nabla\cdot\hat{u}^{k+1} = 0, \\ \hat{u}^{k+1}\cdot n_{|\Gamma} = \frac{2\nu\delta t}{3}\nabla\times\nabla\times\tilde{u}^k\cdot n_{|\Gamma}, \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2\delta t}(\tilde{u}^{k+1} - \hat{u}^{k+1}) - \nu\nabla^2\tilde{u}^{k+1} = 0, \\ \tilde{u}^{k+1}_{|\Gamma} = 0. \end{cases} \tag{15}$$

On obtient ainsi l'algorithme proposé dans [4,3]. Depuis son apparition l'algorithme (14)–(15) n'a jamais été analysé et est resté cantonné aux méthodes spectrales car en faisant intervenir la trace normale d'une dérivée seconde il met en jeu un cadre fonctionnel non standard qui exclus les méthodes d'approximation H^1-conformes du type éléments finis.

Remarque 4. – En constatant que l'algorithme (14)–(15) est en fait la forme rotationnelle de la méthode de correction de vitesse, la présente Note fournit donc la première preuve de stabilité et de convergence de la méthode proposée dans [4,3].

5. Conclusions

Les preuves des théorèmes 2.1 et 3.1 sont basées sur le lemme suivant

LEMME 5.1. – *Sous les hypothèses du théorème* 2.1 (*resp. théorème* 3.1), *la solution de* (2)–(3)–(4) (*resp.* (8)–(9)) *satisfait l'estimation*

$$\|\nabla\cdot\tilde{u}\|_{l^\infty(L^2(\Omega)^d)} \leqslant c(u_e, p_e, T)\,\delta t^{3/2}. \tag{16}$$

Une bonne caractérisation de l'erreur de fractionnement des deux algorithmes en question est fournie par la proposition suivante.

PROPOSITION 5.2. – *Si la marche en temps des algorithmes* (2)–(3)–(4) *et* (8)–(9) *est remplacée par le schéma d'Euler, l'estimation* (16) *est encore valable.*

Remerciements. The work of Jie Shen is partially supported by NFS grants DMS-0074283. Part of the work was completed while Jie Shen was a CNRS "Poste Rouge" visitor at LIMSI, France.

Références bibliographiques

[1] Goda K., A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two- or three-dimensional cavity flows, J. Comput. Phys. 30 (1979) 76–95.
[2] Guermond J.-L., Un résultat de convergence à l'ordre deux en temps pour l'approximation des équations de Navier–Stokes par une technique de projection, Modél. Math. Anal. Numér. (M2AN) 33 (1) (1999) 169–189.
[3] Israeli M., Karniadakis K.E., Orsag S.A., High-order splitting methods for the incompressible Navier–Stokes equations, J. Comput. Phys. 97 (1991) 414–443.
[4] Israeli M., Orsag S.A., Deville M., Boundary conditions for incompressible flows, J. Sci. Comput. 1 (1986) 75–111.
[5] Minev P.D., Timmermans L.J.P., Van De Vosse F.N., An approximate projection scheme for incompressible flow using spectral elements, Int. J. Numer. Methods Fluids 22 (1996) 673–688.
[6] Shen J., On error estimates of the projection methods for Navier–Stokes equations: second-order schemes, Math. Comp. 65 (215) (1996) 1039–1065.
[7] Van Kan J., A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow, SIAM J. Sci. Statist. Comput. 7 (3) (1999) 870–891.